Решение задач по геометрии при подготовке к ГИА

Введение

Подготовка к государственной итоговой аттестации (ГИА) неотъемлемая часть современного курса математики. Задачи по геометрии занимают примерно третью часть всех заданий КИМов.
Геометрия является очень мощным средством развития личности в самом широком диапазоне. Среди дисциплин математического цикла геометрия выделяется своим вольнодумством, неким особым свободолюбивым характером, нежелающим подчиняться стандартам, нормам, алгоритмам.

Целью изучения геометрии, конечно, является знание. Но нужно всегда помнить, что геометрия есть феномен общечеловеческой культуры. Человек не может развиваться культурно и духовно, если он не изучал в школе геометрию. Геометрия возникла не только из практических, но и из духовных потребностей человека.

Научной и нравственной основой курса геометрии является принцип доказательности всех утверждений. И это единственный школьный предмет, включая даже предметы математического цикла, полностью основанный на последовательном выводе всех утверждений.

Геометрия, впрочем, как и алгебра, является носителем собственного познания мира. Овладение этим методом важнейшая цель образования. Процесс изучения геометрии должен включать самые разнообразные виды деятельности. В том числе и даже в первую очередь решение задач. Задача это не только умения, это и элемент знания. Ученик должен ознакомиться с определенным набором достаточно трудных геометрических задач, научиться решать задачи, следуя известным образцам. В геометрии в отличие от алгебры алгоритмов очень мало, почти нет. Поэтому при обучении возрастает значение опорных задач, обобщающих полезный факт, либо иллюстрирующий метод или прием.

Метод площадей

Основные свойства площадей

В элементарной математике, самыми трудными считаются геометрические задачи. Как научиться решать геометрические задачи, особенно сложные, конкурсные? При решении геометрических задач, как правило, алгоритмов нет, и выбирать наиболее подходящую к данному случаю теорему не просто. Поэтому, желательно в каждой теме выработать какие-то общие положения, которые полезно знать всякому решающему геометрические задачи.Предлагаем один из алгоритмов решения многих геометрических задач метод площадей, т.е. решение задач с использованием свойств площадей

Свойство №1

Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь при этом не изменится

Свойство №2

Если два треугольника имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).

Свойство №3

Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведение сторон, заключающих этот угол.

Свойство №4

Отношение площадей подобных треугольников равны квадрату коэффициента подобия.

Свойство № 5

Медиана треугольника делит его на две равновеликие части.

Свойство №6

Медианы треугольника делят его на три равновеликие части

Свойство №7

Средние линии треугольника площади S отсекают от него треугольники площади, которых равны одной четвертой части площади ▲ABC

Свойство №8

Медианы треугольника делят его на 6 равновеликих частей.

Система математических задач, решаемых методом площадей

В современных учебниках, пособиях и различного рода задачниках, к сожалению, уделяется мало внимания психологическим факторам, влияющим на успешность обучения математике. А именно, воспитание у учащихся уверенности в своих силах, развитие умения пользоваться прошлым опытом.

Берутся два общеизвестных утверждения, которые являются базовыми. На основе этих утверждений выстраиваются две «цепочки» задач по нарастающему уровню сложности. Решения задач в этих «цепочках» основаны на базовых утверждениях и на решении предыдущих задач.

Утверждение 1. Два треугольника являются равновеликими, если равны их высоты и основания.

Задача 1. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника.

Решение. Высоты треугольников ABD и BCD равны. AD = BC (по свойству параллелограмма). Тогда в силу утверждения 1 S▲ABD = S▲BCD

Задача 2. На стороне CD параллелограмма ABCD взята произвольная точка E. Зная, что S▲ABE = S, найдите площадь параллелограмма ABCD.

Решение. Проведем дополнительное построение: KE∥AD. Тогда из задачи 1 следует, что S▲KBE = S▲CBE, а S▲AKE = S▲ADE . Отсюда SABCD = 2S.

Задача 3. В параллелограмме ABCD на сторонах AB и CD взяты произвольные точки M и N. Докажите, что площадь четырехугольника KMEN равна площади четырех образовавшихся треугольников.

Решение. Проведем отрезок KE. Тогда в силу задачи 2 S▲KME = S▲KMB + S▲MEC, а S▲KNE = S▲AKN + S▲EDN

Отсюда S▲KMEN = S▲KMB + S▲MEC + S▲KNE + S▲EDN

Задача 4. Внутри параллелограмма ABCD взята произвольная точка O. Зная площадь трех треугольников с вершиной в точке O, найдите площадь четвертого треугольника.

Решение. Пусть S▲ADO = S1, S▲ABO = S2,

S▲BOC = S3. Произведем дополнительное построение: KE∥AB.

Введем следующие обозначения:

S▲EOD = a, S▲KCO = b, S▲BKO = c, S▲AEO = d.

Тогда S2 = c +d , S▲DOC = a + b, S1 + S3 = a + b + c + d .

Отсюда S▲DCO = S1 + S3 - S2

Задача 5. Каждая диагональ четырехугольника делит его на треугольники одинаковой площади. Докажите, что это параллелограмм.

Решение. Из условия следует, что верны равенства: S1 + S2 = S3 + S4 и S1 + S4 = S3 + S2 . Откуда получим, что S1 = S3, а S2 = S4. Отметим, что S2:S1= AO:OC, S4:S3=AO:OC. Кроме этого, соответствующие высоты треугольников BOC, COD и AOB, AOD равны, соответственно, площади относятся как длины оснований. Из того, что S1 = S3 и S2 = S4. следует, что AO:OC =AO: OC. Следовательно, AO = OC. Аналогично можно доказать, что BO = OD. Можно сделать вывод, что диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, а это значит, что ABCD - параллелограмм.

Утверждение 2. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.

Задача 6. В параллелограмме ABCD точка K □ середина AB, а L □ середина BC. Зная, что SKBLD = S , найдите SABCD .

Решение. Проведем диагональ BD. Тогда, исходя из утверждения 2, получим, что SABCD = 2S.

Задача 7. В четырехугольнике ABCD точка E, середина AB, соединена с вершиной D, а точка F, середина CD, - с вершиной B. Докажите, что SABCD = 2SEBFD

Решение. Проведя диагональ BD и рассуждая аналогично задаче 6, получим, что SABCD = 2SEBFD

Задача 8. В произвольном четырехугольнике проведены отрезки, соединяющие середины сторон этого многоугольника. Зная площадитрех из полученных четырехугольников, найдите площадь четвертого.

Решение. В силу утверждения 2 и обозначений, использованных для элементов чертежа, получим S1 = a + b, S2 = b + c, S3 = c + d, S4 = a + d. Тогда, зная S1, S2, S3, S4 получим, что S4 = S1 + S3 - S2 .
Задача 9. Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.
Решение. В силу задачи 1 и утверждения 2 будем иметь
S▲AOB = S▲BOC = S▲COD =S▲DOA
Задача 10. Середины двух параллельных сторон параллелограмма соединены с противолежащими вершинами. Какая часть площади параллелограмма ограничена проведенными отрезками?
Решение. Проведем отрезок МК. Тогда в силу задачи 9 SMFKE = 1/4SABCD.
Задача 11. Дан выпуклый четырехугольник ABCD. Середины сторон AB и CD обозначены соответственно через K и M, точку пересечения отрезков BM и CK □ через P, точку пересечения отрезков AM и DK □ через O. Докажите, SMOKP = S▲BPC + S▲AOD
Решение. Проведем диагональ BD. Так как DK и BM медианы вновь полученных треугольников, то SAKD=1/2SABD, SBMC=1/2SBCD. Отсюда S▲AKD + S▲BMC = 1/2SABCD (1) Проведя диагональ AC и учитывая, что AM и CK медианы уже вновь полученных треугольников, получим SKBC=1/2SABC, SAMD=1/2SACD .
Тогда S▲KBC + S▲AMD = 1/2SABCD (2).
Из равенств (1) и (2) следует, что S▲AKD + S▲BMC + S▲KBC + S▲AMD = SABCD .
В этой сумме дважды учтены площади треугольников BPC и AOD, но не учтена площадь четырехугольника MOKP. Поэтому SMOKP = S▲BPC + S▲AOD.
Задача 12. На продолжениях сторон выпуклого четырехугольника ABCD отложены отрезки BB1 = AB, CC1 = BC, DD1 = CD и AA1 = AD. Докажите, что площадь четырехугольника A1B1C1D1 в 5 раз больше площади четырехугольника ABCD.
Решение. Медиана делит площадь треугольника пополам, поэтому площади треугольников ABC, BB1C и CC1B1 равны между собой. Площадь треугольника ACD равна площади треугольника ADD1, площадь треугольника ADD1 равна площади треугольника AA1D1 и т. д. Тогда S▲BB1C1 = 2S▲ABC, S▲CC1D1 = 2S▲BCD, S▲AA1B1 = 2S▲DBA, S▲DD1A1 = 2S▲CAD. Суммируя эти равенства, получим S▲BB1C1 + S▲CC1D1 + S▲AA1B1 + S▲DD1A1.Обозначим площадь четырехугольника ABCD через S, тогда площадь четырех построенных треугольников равна 4S, а площадь четырехугольника A1B1C1D1 равна 5S.
Задача 13. Вершина A квадрата ABCD соединена с точкой O □ серединой BC, вершина B □ с точкой E □ серединой CD, вершина C □ с точкой N □ серединой AD, а вершина D □ с точкой K □ серединой AB. Точки пересечения проведенных прямых L, M, R, и P служат вершинами четырехугольника LMRP.
Докажите, что SLMRP=51SABCD.
Решение. BKDE □ параллелограмм, так как BK = DE и BK?DE, поэтому BE?KD. AOCN □ параллелограмм, так как AN = OC и AN?OC, поэтому OA?CN. Учитывая, что O, E, N, и K □ середины сторон, из теоремы Фалеса следует, что AL = LP, BP = PR, CR = RM и DM = ML. Для большей наглядности дальнейшего хода решения задачи, представим чертеж в другом виде. Дальнейший ход решения совпадает с решением задачи 12.
Продолжим «цепочку» задач, исходной фигурой в которых будет выступать уже треугольник.
Задача 14. На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка K так, что AB = BK. Точка L □ середина BC. Зная, что S▲BKL = S, найдите S▲ABC.
Решение. Сделаем дополнительное построение □ проведем отрезок AL. В силу утверждения 2 и использованных на чертежах обозначений S▲ABC = 2S .
Задача 15. На продолжении сторон треугольника ABC построены отрезки AA1 =AC, BB1 = AB и CC1 = BC . Докажите, что S▲A1B1C1 = 7S▲ABC.
Решение. Произведя дополнительные построения, приняв во внимание обозначения на чертеже и опираясь на утверждение 2, видим, что решение следует непосредственно из чертежа.
Задача 16. На продолжении стороны треугольника ABC взята точка D так, что AC = CD. Пусть M □ середина стороны AB, а K □ точка пересечения отрезков BC и MD. Докажите, что площадь треугольника BKD равна площади четырехугольника AMKC.

Решение. В треугольнике ABD DM и BC медианы. Поэтому S▲AMD =S▲BMD и S▲ACB = S▲CDB . Эти равенства можно записать так: SAMKC + S▲CKD = S▲MDK + S▲BKD, SAMKC + S▲MBK = S▲CKD + S▲BKD
Сложив эти равенства и упростив выражение, получим SAMCK = S▲BKD .

Опорные задачи, решаемые методом площадей

Метод площадей имеет много разновидностей. Его применяют, например, при замене отношения отрезков, расположенных на одной прямой, отношением площадей треугольников с общей вершиной, основаниями которых являются рассматриваемые отрезки.
При решении задач методом площадей часто применяют основные формулы, выражающие площадь треугольника.
Обозначим, через A , B и C величины соответствующих углов треугольника ABC, а через a, b и c, как обычно, длины противолежащих им сторон, 2p периметр треугольника, r и R соответственно радиус вписанной и описанной окружности.
В этих обозначениях для площади треугольника справедливы следующие формулы:
Формулы (1), (4) и (5) хорошо известны, формулы (2), (3) получаются из формулы (1), используя теорему синусов. Формула (4) справедлива для любого описанного многоугольника.
Используя формулу (1) для площади треугольника, можно доказать теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника.
Теорема. Если биссектриса угла A треугольника ABC, то .
Доказательство. Пусть угол при вершине A в треугольнике ABC равен . Рассмотрим треугольники и (рис. 10). Их площади относятся как отрезки и .
Используя формулу (2.1) имеем

Рассмотрим опорные задачи, решаемые методом площадей.

Пример 1. Пусть две прямые пересекаются в точке A. B и B1 любые две точки на одной прямой, а C и C1 на другой. Докажите, что .
Решение. Углы при вершине A треугольников ABC и AB1C1 либо равны, либо дополняют друг друга до 1800 (рис. 11), то есть в любом случае синусы этих углов равны. Используя формулу (2.1) для площади треугольника имеем .
Пример 2. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки B1 и C1 так, что , . Докажите, что .
Решение следует непосредственно из предыдущего примера.
Пример 3. Докажите, что длину биссектрисы треугольника ABC можно вычислить по формуле , где , , , A угол BAC.
Решение. Учитывая свойство 3 площади, имеем или . Заменив в левой части равенства и сократив обе его части на , получим , откуда .
Рассмотрим еще одну полезную задачу.
Пример 4. Пусть O точка пересечения диагоналей четырехугольника ABCD. Тогда имеет место равенство .
Решение. Пусть и высоты треугольников ABD и CBD, проведенные к стороне BD (рис. 13). Очевидно, что . .
Используя результаты предыдущих задач, рассмотрим еще один важный пример, который в учебнике И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7-9 классы» назван типичной задачей.
Пример 5. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA взяты соответственно точки K, M и P так, что AK:KB=2:3, BM:MC=3:4, CP:AP=4:5. В каком отношении отрезок BP делится отрезком KM?
Решение. Пусть BP и KM пересекаются в точке O (рис. 14) и . Так как , , то . Так как , , то . Так как , , то . Следовательно, и .
При решении задач методом площадей следует помнить, что
1. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.
2) Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Произведение площадей треугольников прилегающих к противоположным сторонам равны.
Заключение

Решение задач методом площадей необходимо учащимся в наше время, как при подготовке к ГИА. Владение приемами решения задач методом площадей можно считать критерием знаний основных разделов школьной геометрии.

При разработке данной темы проводилось исследование школьных учебников «Геометрия 7-9».Метод площадей рассматривается только в учебнике И.Ф. Шарыгина. Здесь ему отведен целый раздел. У Л.С. Атанасяна с помощью этого метода доказывается первый признак подобия треугольников, свойство биссектрисы угла. В учебнике Погорелова эта тема не рассматривается.

В данной работе показано, что тема «Метод площадей» обладает множеством разнообразных задач, направленных на повышение интереса к изучению геометрии, на развитие мышления школьников, на развитие нравственных качеств. Метод площадей это использование формул и свойств площадей при решении задач, в которых может не упоминаться о площадях.

Подобранные задачи и методические рекомендации могут быть использованы учителями математики в их практической деятельности, при организации внеклассной работы, при подготовке к ГИА, что позволяет повысить эффективность обучения геометрии.

Именно такие задачи играют большую роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников, Поэтому учащиеся, владеющие данным методом решения задач, успешно справляются с другими задачами.