

Разминка

1. Число умножили на сумму его цифр и получили 10530.
Найдите это число.

Ответ: 1170,585

2. Произведение числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 5848. Найдите эти числа.

Ответ: 68 и 86

3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

Ответ: 6, 42, 1806

4. Решите уравнение в натуральных числах

$$x + y = x^2 - xy + y^2$$

Ответ: (2;1), (1;2), (2;2)

Гусеница и другие

5. Гусеница выползла из своего домика в полдень и ползет по лугу, поворачивая после каждого часа направо или налево на 90° .

За первый час она проползла 1м, а за каждый следующий – на 1м больше, чем за предыдущий. На каком наименьшем расстоянии от домика она могла оказаться в 7 часов вечера?

Покажите на рисунке.

Ответ:

6. Каждое из чисел 4, 5, . . . , 10 умножают на каждое из чисел 10, 11, . . . , 18 и перед каждым из полученных произведений ставят знак плюс или минус, после чего все 63 полученных произведения складывают.

Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Ответ: 2, 6174

7. Имеется 8 карточек. На них записываются по одному каждое из чисел $-1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12$.

Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному из чисел $-1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Ответ: а) нет, б) нет, в) 16

8. В ряд выписаны числа: $1^2, 2^2, \dots, (N-1)^2, N^2$. Между ними произвольным образом расставляются знаки «+» и «-» и находят получившуюся сумму.

Может ли такая сумма равняться:

а) 12, если $N=12$?

б) 0, если $N=70$?

в) 0, если $N=48$?

г) -3, если $N=90$?

Ответ: а) да, б) нет, в) да, г) да

Дрова и другие

9. Кучу бревен распилили на чурки. Сделали 35 распилов и получили 50 чурок. Сколько было бревен?

10. Имеется 6 больших листов бумаги. Любой лист (любого размера) можно разрезать на 5 частей. Может ли в результате получиться

а) 2013 листиков бумаги?

б) 2012 листиков бумаги?

в) 2010 листиков бумаги?

Если ответ «да», то сколько придется сделать разрезов?

Простые числа

11. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трехчлена и его значение в точке $x=11$ являются простыми числами. Найдите корни трехчлена.

Ответ: 12, 13

12. Найдите все такие целые a и b , что корни уравнения $x^2+(2a+9)x+3b+5=0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a+9$ и $3b+5$ – простыми числами.

Ответ: $a=-3$; $b-1$

13. Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

Ответ: (2;3), (3;5;7)

Прогрессии

14. Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

Ответ: а) да, б) нет

15. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) может ли в последовательности быть три члена?

б) может ли в последовательности быть четыре члена?

в) может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

Ответ: а) нет, б) нет, в) да

16. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008, и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Ответ: а) нет, б) нет, в) да

17. Дана последовательность натуральных чисел, причем каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 163.

а) какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Ответ: а) 3, б) 39

18. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Ответ: а) 44, б) отрицательных, в) 17

Уравнения

19. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ - произведение всех натуральных чисел от 1 до n .

Ответ: (2; 5)

20. Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$

Ответ: (0; ± 3)

21. Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n , при которых уравнение $(x^2 + y^2)^{2010} = x^n \cdot y^n$ имеет натуральные решения.

Ответ: 2011, 3015

Делимость

22. Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

Ответ: 400; 2500

23. Натуральные числа m и n таковы, что и m^3+n , и $m+m^3$ делятся на m^2+n^2 . Найдите m и n .

Ответ: (1; 1)

Разные

24. Положительное число увеличивается в 16 раз, если в его десятичной записи поменять местами цифры, стоящие на первом и третьем местах после запятой. Найдите третью цифру после запятой в десятичной записи этого числа.

Ответ: 9

25. Числа от 2 до 11 записаны в строчку в некотором порядке. Всегда ли можно вычеркнуть несколько чисел так, чтобы осталось:

а) три числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

б) пять чисел в порядке возрастания или в порядке убывания?

в) четыре числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

Ответ: а) да, б) нет, в) да

26. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $96/35$ и $97/36$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

Ответ: 19/7

27. Десятичная запись натурального числа n должна состоять из различных (не менее двух) цифр одной четности, а само оно должно быть квадратом целого числа. Найдите все такие n .

Ответ: 64, 6084

28. Друг за другом подряд выписали десятичную запись чисел 2^{50} и 5^{50} . Сколько всего цифр выписали?

Ответ: 51