1. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases}|x+a|+|y-a|+|a+1+x|+|a+1-y|=2\\ y=2|x-4|-5\end{cases}$$ имеет единственное решение.

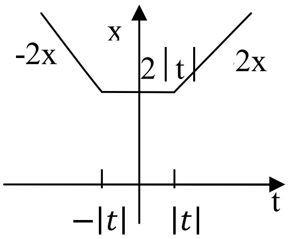
Способ 1: Основан он на том факте, что если сумма каких-то слагаемых равна числу n $(\dots)+(\dots)+\cdots+(\dots)=n$, то сумма этих же слагаемых равна не меньшему числу $|\dots|+|\dots|+\cdots+|\dots|=m,$ где $m\ge n$. Причём $m=n$ только если все подмодульные выражения неотрицатьны. Сумма подмодульных выражений равна $x+a+y-a+a+1+x+a+1-y=2x+2a+2$, но если заменить $|x+a|=|-x-a|$, то

$-x-a+y-a+a+1+x+a+1-y=2$. Значит $$\begin{cases}\begin{cases}x+a\ge 0\\ a+1+x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}y-a\ge 0\\ a+1-y\ge 0\end{cases}\end{cases}$$ и $y=2|x-4|-5$

Получим: $$\begin{cases}\begin{cases}a\ge -x\\ a\ge -1-x\end{cases}\\ \begin{cases}a\le 2|x-4|-5\\ a\ge 2|x-4|-6\end{cases}\end{cases};$$ Теперь применяем координатно-параметрический метод, строим области в системе $a0x$. Самой нижней точкой будет пересечение $2(x-4)-6=-x-1;\ 2x-8-6=-x-1; 3x=-13; x=-\frac{13}{3}; a_1=-\frac{16}{3}$. Самой верхней точкой будет пересечение $-2(x-4)-6=-x;\ -2x+8-6=-x; x=2; a_2=-2$.

Ответ: $a_1=-\frac{16}{3};\ \ a_2=-2$.

Для решения вторым способом напомню, что функция вида $f=|x+\mathrm{t}|+|x-\mathrm{t}|$ это кусочно-линейная функция, так называемое «перевёрнутое коромысло»:



Способ 2: Метод замены, убирающий параметр из первого уравнения и сводящий графики к сумме «коромысел». В первом уравнении $|x+a+1|+|x+a|+|y-a|+|y-a-1|=2$ делаем замены $x+a+1=t; y-a=p$. Получим $|t|+|t-1|+|p|+|p-1|=0$, т.е. сумму двух «коромысел», у которых минимальное значение 2 достигается при $p\in[0;1]$ и $t\in[0;1]$, значит графиком первого уравнения в плоскости $p0t$ будет квадрат в первой четверти с вершиной в нуле и со стороной 1!!! Да, второе уравнение тогда будет с параметром $\begin{cases}x=t-a-1\\ y=p+a\end{cases}$, $p+a=2|t-a-1-4|-5,\ p=2|t-(a+5)|-(a+5),$ если заменить $a+5=b,$ то $p=2|t-b|-b$ - это семейство «галочек», вершины которых скользят по прямой $p=-t$. Эта «галочка» касается квадрата правой стороной в точке (0;1), тогда $1=2(-b)-b;\ \ b=-\frac{1}{3}$. Либо касается левой стороной в точке (1;1), тогда

$1=-2(1-b)-b;\ 1=-2+2b-b;\ \ b=3$. Возвращаемся к a: $a_1=-\frac{16}{3};\ a_2=-2$.

Ответ: $a_1=-\frac{16}{3};\ \ a_2=-2$.

Геометрия:

1. Две окружности имеют общий центр O. На окружности большего радиуса выбрана точка F. А) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки F до концов диаметра меньшей окружности не зависит ни от выбора точки F, ни от выбора диаметра. Б) Известно, что радиусы окружностей равны 10 и 24. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются концы диаметра меньшей окружности и точка F, тангенс угла F этого треугольника равен 1/4.
2. Через вершины A,B,C параллелограмма ABCD со сторонами AB=3 и BC=5 проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E, причем BE=9.

   а) Докажите, что BE>BD

   в) Найдите диагональ BD

Задание 19:

а) На доске записаны числа 1, 21, 22, 23, 24, 25. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность – неотрицательное число. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 15?

б) Круглая мишень разбита на 20 секторов, которые нумеруются по кругу в каком-либо порядке числами 1, 2, ..., 20. Если секторы занумерованы, например, в следующем порядке 1, 20, 5, 12, 9, 14, 11, 8, 16, 7, 19, 3, 17, 2, 15, 10, 6, 13, 4, 18, то наименьшая из разностей между номерами соседних (по кругу) секторов равна $12 - 9 = 3$. Может ли указанная величина при нумерации в другом порядке быть больше 3?

в) Каково наибольшее возможное значение этой величины?