IV. Метод, использующий ограниченность функций.

Алгоритм решения

$$f_1(x) = f_2(x)$$

1) **Найти ОДЗ и упростить по возможности.**
2) **Найти или оценить** $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}(f_1(x))$ **и** $\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}(f_2(x))$
3) **Сравнить** E_1 **и** E_2**:**

   - если общих точек много, то метод не сработал.

   - если общих точек нет, то решения нет.

   - если одна общая точка a**, то**

   $f_1(x) = f_2(x)$ **<=>** $\begin{cases} f_1(x) = a \\ f_2(x) = a \end{cases}$

4) **Решить наиболее простое уравнение и проверить найденные корни для другого уравнения.**

1. Решить уравнение

1 $$2^{\cos^4 2x + \frac{1}{2}} = \sin 3x - \cos 3x$$

Упростим уравнение, применив формулы:

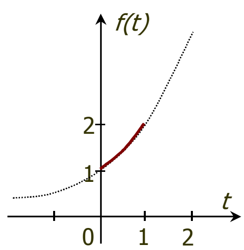
$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2^{\cos^4 2x}\sqrt{2} = \sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2^{\cos^4 2x} = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Рассмотрим левую часть уравнения:

$f_1(t) = 2^t$, *где* $t = \cos^4 2x, t \in [0;1]$



Построим график и найдем $\mathrm{E}(f_1)$:

$\mathrm{E}(f_1): f_1 \in [1;2]$

1 $$2^{\cos^4 2x}=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Рассмотрим правую часть уравнения:

$$f_2(x)=\sin y,\ где\ \ y=3x-\frac{\pi}{4},y\in R$$

$$E(f_2):f_2\in[-1;1]$$

В итоге получим: $E(f_1):f_1\in[1;2]$, $E(f_2):f_2\in[-1;1]$ $\Rightarrow$ $a=1$

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}2^{\cos^4 2x}=1=2^0\\ \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos 2x=0\\ \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}$$

1 Решим систему уравнений: $\begin{cases}\cos 2x=0\\ \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}$

$$\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z\\ 3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi m,m\in Z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},n\in Z\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi m}{3},m\in Z\end{cases}$$

$$x_{общ.}=\frac{\pi}{4}(n=0,m=0);\ T_1=\frac{\pi}{2};T_2=\frac{2\pi}{3};T_{общ.}-?$$

$$НОК(90^0;120^0)=360^0;\ T_{общ.}=2\pi$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,n\in Z$

Итоговый Алгоритм решения:

1 $$2^{\cos^4 2x+\frac{1}{2}}=\sin 3x-\cos 3x$$

1. Упростить: $$2^{\cos^4 2x}=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Найти множества значений правой и левой части уравнения и сравнить их:

$$E(f_1): f_1\in[1;2]$$
$$E(f_2): f_2\in[-1;1]$$
$\Rightarrow$ $a=1$

3. Перейти к равносильной системе: $$\begin{cases}2^{\cos^4 2x}=1=2^0\\ \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}$$

4. Решить систему уравнений:

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$

2. Решить уравнение

2 $$x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2x-x^2}$$

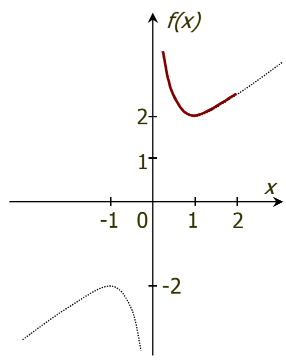
Найдем ОДЗ: $\begin{cases}2x-x^2\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x\in(0;2]$

Рассмотрим левую часть уравнения:

$$f_1(x)=x+\frac{1}{x}, \text{ где } x\in(0;2]$$

Построим график и найдем $E(f_1)$:

$$E(f_1): f_1\in[2;\infty)$$

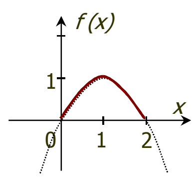


Рассмотрим правую часть уравнения:

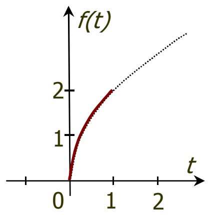
$$f_2(x)=2\sqrt{2x-x^2}, \text{ где } x\in(0;2]$$

Построим график $t(x)=2x-x^2, \text{ где } x\in(0;2]$

$$t\in(0;1]$$



2 Построим график $f_2(t) = 2\sqrt{t}$, *где* $t \in (0;1]$ и найдем $\mathrm{E}(f_2)$



$\Rightarrow$ $\mathrm{E}(f_2): f_2 \in (0;2]$

В итоге получим: $\begin{matrix} \mathrm{E}(f_1): f_1 \in [2;\infty) \\ \mathrm{E}(f_2): f_2 \in (0;2] \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $a = 2$

Перейдем к равносильной системе и решим ее:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 2 \\ 2\sqrt{2x - x^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$

Итоговый Алгоритм решения:

2 $x + \dfrac{1}{x} = 2\sqrt{2x - x^2}$

1. Найти ОДЗ: $x \in (0;2]$

2. Найти множества значений правой и левой части уравнения и сравнить их:

$$\begin{matrix} \mathrm{E}(f_1): f_1 \in [2;\infty) \\ \mathrm{E}(f_2): f_2 \in (0;2] \end{matrix} \Rightarrow a = 2$$

3. Перейти к равносильной системе: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 2 \\ 2\sqrt{2x - x^2} = 2 \end{cases}$

4. Решить систему уравнений:

$x = 1$

3. Решить уравнение

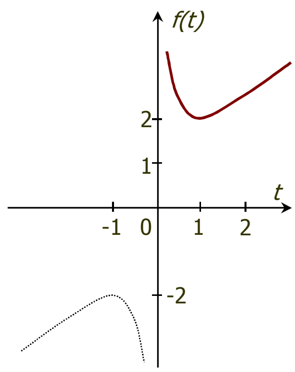
3 $$\left(\sin\frac{\pi x}{8}+\cos\frac{\pi x}{8}\right)^2=\left|\frac{x}{2}\right|+\left|2x^{-1}\right|$$

Упростим уравнение, применив формулы:

$$a^{-1}=\frac{1}{a};\ \sin\alpha\pm\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{4}\right)$$

Получим: $2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\left|\frac{x}{2}\right|+\left|\frac{2}{x}\right|$, или $2\sin^2\alpha=t+\frac{1}{t}$

где $t=\left|\frac{x}{2}\right|,\ t\in(0;\infty);\ \alpha=\frac{\pi x}{8}+\frac{\pi}{4}$



Рассмотрим левую часть уравнения:

$f_1(\alpha)=2\sin^2\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{E}(f_1):\ f_1\in[0;2]$

Рассмотрим правую часть уравнения,
Построим график и найдем $\mathrm{E}(f_2)$:

$\mathrm{E}(f_2):\ f_2\in[2;\infty)$

3 $$2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\left|\frac{x}{2}\right|+\left|\frac{2}{x}\right|$$

В итоге получим: $\mathrm{E}(f_1):\ f_1\in[0;2]$, $\mathrm{E}(f_2):\ f_2\in[2;\infty)$ $\Rightarrow$ $a=2$

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=2\\ \left|\frac{x}{2}\right|+\left|\frac{2}{x}\right|=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi x}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\pm1\\ \frac{x}{2}=\pm1\end{cases}$$

Решим второе уравнение и подставим найденные корни в первое:

$$\left[\begin{array}{l}x=2;\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ x=-2;\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\neq\pm1\end{array}\right.$$

Ответ: $x=2$

Итоговый Алгоритм решения:

3 $$\left(\sin\frac{\pi x}{8}+\cos\frac{\pi x}{8}\right)^2=\left|\frac{x}{2}\right|+\left|2x^{-1}\right|$$

1. Упростить: $2\sin^2\alpha=t+\frac{1}{t}$

2. Найти множества значений правой и левой части уравнения и сравнить их:

   $E(f_1): f_1\in[0;2]$ $\Rightarrow$ $a=2$

   $E(f_2): f_2\in[2;\infty)$

3. Перейти к равносильной системе: $$\begin{cases}2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=2\\ \left|\frac{x}{2}\right|+\left|\frac{2}{x}\right|=2\end{cases}$$

4. Решить систему уравнений:

   $x=2$

4. Решить уравнение

4 $$2\left|\cos\frac{x^2+100x}{100}\right|=\lg(10+x)+\frac{1}{\lg(10+x)}$$

Найдем ОДЗ: $\begin{cases}10+x>0\\10+x\neq 1\end{cases}\Rightarrow x\in(-10;-9)\cup(-9;\infty)$

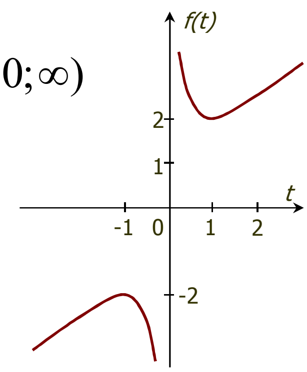
Рассмотрим левую часть уравнения:

$f_1(x)=2|\cos\alpha|$, *где* $\alpha=\frac{x^2+100x}{100}$ $\qquad E(f_1): f_1\in[0;2]$

Рассмотрим правую часть уравнения:

$f_2(t)=t+\frac{1}{t}$, *где* $t=\lg(10+x), t\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$

Построим график и найдем $E(f_2)$:



$E(f_2): f_2\in(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$

4 $$2\left|\cos\frac{x^2+100x}{100}\right| = \lg(10+x)+\frac{1}{\lg(10+x)}$$

В итоге получим: $\mathrm{E}(f_1): f_1 \in [0;2]$

$\mathrm{E}(f_2): f_2 \in (-\infty;-2]\cup[2;\infty)$ $\Rightarrow$ $a=2$

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\left|\cos\frac{x^2+100x}{100}\right| = 2 \\ \lg(10+x)+\frac{1}{\lg(10+x)} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{x^2+100x}{100} = \pm 1 \\ \lg(10+x) = 1 \end{cases}$$

Решим второе уравнение и подставим найденные корни в первое:

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \cos 0 = 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x=0$

Итоговый Алгоритм решения:

4 $$2\left|\cos\frac{x^2+100x}{100}\right| = \lg(10+x)+\frac{1}{\lg(10+x)}$$

1. Найти ОДЗ: $x \in (-10;-9)\cup(-9;\infty)$
2. Упростить: $2|\cos\alpha| = t+\frac{1}{t}$
3. Найти множества значений правой и левой части уравнения и сравнить их:

   $\mathrm{E}(f_1): f_1 \in [0;2]$

   $\mathrm{E}(f_2): f_2 \in (-\infty;-2]\cup[2;\infty)$ $\Rightarrow$ $a=2$
4. Перейти к равносильной системе: $\begin{cases} \cos\frac{x^2+100x}{100} = \pm 1 \\ \lg(10+x) = 1 \end{cases}$
5. Решить систему уравнений:

   $x=0$

5. Решить уравнение

5 $\log_{2,5}(3x+4-x^2)=x^2-3x+4,25$

1. Найти ОДЗ: $x\in(-1;4)$
2. Упростить:

   $\log_{2,5}t=y,\ \text{где}\ y\in[2;8,25),t\in(0;6,25],\ \log_{2,5}t\in(-\infty;2]$
3. Найти множества значений правой и левой части уравнения и сравнить их:

   $E(f_1): f_1\in(-\infty;2]$ $\Rightarrow$ $a=2$

   $E(f_2): f_2\in[2;8,25)$
4. Перейти к равносильной системе: $\begin{cases}\log_{2,5}(3x+4-x^2)=2\\ x^2-3x+4,25=2\end{cases}$
5. Решить систему уравнений:

   $x=1,5$

6. Решить уравнение

6 $(2x-3)^{0,5}+(2x-3)^{-0,5}=\log_{2,5}(4x-x^2+2,25)$

1. Найти ОДЗ: $x\in(1,5;4,5)$
2. Упростить: $t+\frac{1}{t}=\log_{2,5}y,\ \text{где}\ t\in(0;\sqrt{6}),\ y\in(0;6,25]$
3. Найти множества значений правой и левой части уравнения и сравнить их:

   $E(f_1): f_1\in[2;\infty)$ $\Rightarrow$ $a=2$

   $E(f_2): f_2\in(-\infty;2]$
4. Перейти к равносильной системе: $\begin{cases}\log_{2,5}(4x-x^2+2,25)=2\\ (2x-3)^{0,5}+(2x-3)^{-0,5}=2\end{cases}$
5. Решить систему уравнений:

   $x=2$

7. Решить уравнение

7 $(4x - x^2 - 3)\log_2(\cos^2 \pi x + 1) = 1$

1. Найти ОДЗ: $x \in R$

2. Упростить: $y\log_2 t = 1,\ \textit{где}\ y \in (-\infty;1],\ t \in [1;2],\ \log_2 t \in [0;1]$

3. Найти множества значений правой и левой части уравнения и сравнить их:

$\mathrm{E}(f_1): f_1 \in (-\infty;1]$ $\Rightarrow$ $a = 1$

$\mathrm{E}(f_2): f_2 = 1$

4. Перейти к равносильной системе: $\begin{cases} 4x - x^2 - 3 = 1 \\ \log_2(\cos^2 \pi x + 1) = 1 \end{cases}$

5. Решить систему уравнений:

$x = 2$

8. Решить уравнение

8 $\log_3\left(4 - \left|\cos\frac{4x}{3}\right|\right) = \sin x$

1. Найти ОДЗ: $x \in R$

2. Упростить: $\log_3 t = \sin x,\ \textit{где}\ t \in [3;4]$

3. Найти множества значений правой и левой части уравнения и сравнить их:

$\mathrm{E}(f_1): f_1 \in [1;\log_3 4]$ $\Rightarrow$ $a = 1$

$\mathrm{E}(f_2): f_2 = [-1;1]$

4. Перейти к равносильной системе: $\begin{cases} \log_2(4 - \left|\cos\frac{4x}{3}\right|) = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases}$

5. Решить систему уравнений:

$-\frac{3\pi}{2} + 6\pi n,\ \ n \in Z$