## VI. Метод инвариантности

Инвариантность – это неизменность математического объекта (числового множества, выражения, функции, уравнения) относительно некоторых преобразований. Например в чётных выражениях если есть решение $x_0$, то есть и решение $y_0$. Системы могут быть инвариантны относительно *x* и *y* (т.е. не меняться от замены *x* на *y*). Может быть инвариантность для $x$ и $\frac{1}{x}$ и т.д. Но в людом случае количество решений в инвариантных выражениях чётное, если инвариант не вырождается (если *x=0, x=y,* $x = \frac{1}{x}$ и т.д.). Это требование является необходимым, но могут быть и ещё корни. Поэтому надо найти подозрительные *a* и доказать, что при определенных *a* из этого множества корень один. Примеры:

1. Найдите значения параметра, когда система $\begin{cases} y \geq x^2 + 2a \\ x \geq y^2 + 2a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Заметим, что x и y входят в систему симметричным образом. Если $(x_0; y_0)$ решение системы, то $(y_0; x_0)$ также является ее решением. Так как решение должно быть единственным, то $x_0=y_0$ и при этом число $x_0$ удовлетворяет неравенству ${x_0}^2 - x_0 + 2a \leq 0$, то неравенство должно иметь единственное решение, что будет тогда, когда дискриминант равен нулю. $D = 1 - 8a = 0; a = \frac{1}{8}$

Теперь докажем, что при этом значении *a* данная система действительно имеет единственное решение. При $a = \frac{1}{8}$ данная система примет вид $\begin{cases} y \geq x^2 + \frac{1}{4} \\ x \geq y^2 + \frac{1}{4} \end{cases}$

Если пара чисел удовлетворяет этой системе неравенств, то она удовлетворяет и неравенству , полученному при сложении этих неравенств. Складывая эти неравенства, имеем неравенство $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$. Последнее неравенство выполняется только для $x = y = \frac{1}{2}$, следовательно оно имеет единственное решение.

Ответ: $a = \frac{1}{8}$

2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a-3)^2 = |x + 3 - a| + |x + a - 3|$$

имеет единственный корень.

Решать будем, заметив, что при замене в это уравнении *x* на −*x* ничего не изменится. Итак, попробуем подставить в это уравнение −*x* вместо *x*. Получим:

$$(-x)^2 + (a-3)^2 = |-x + 3 - a| + |-x + a - 3|$$

$(-x)^2 = x^2$. Но что будет с модулями? На первый взгляд они сильно отличаются от первоначальных. Тут надо воспользоваться свойством, что |−*x*| = |*x*| (легко проверяется, если раскрыть знак модуля слева и справа на положительном и отрицательном направлении оси *x*).

Тогда получим, что внутри модулей в правой части уравнения все знаки можно поменять:

$$x^2 + (a-3)^2 = |x + a - 3| + |x + 3 - a|.$$

Выходит, что правая часть осталась точно такое же, как и была изначально, модули просто поменялись местами. Значит, мы можем сделать важный вывод: если некоторый *x* удовлетворяет нашему уравнению, то и −*x* будет также, удовлетворять. По условию задачи нас просят найти единственный *x*. Значит, чтобы наши решения не дублировались, необходимо (но не достаточно, об этом позже), чтобы *x* равнялся нулю. Таким образом, мы знаем, что *x*=0 должно быть решением уравнения. Подставим его и найдем *a*: $(a-3)^2$=|3−*a*|+|*a*−3|.

По уже использованному свойству модуля |*x*|=|−*x*| поменяем знаки внутри первого модуля в левой части. Левую часть тоже преобразуем: $(a-3)^2$=2|*a*−3|можно легко проверить, раскрыв модуль по правилам. Получим: *a*=3;*a*=5;*a*=1.

Теперь у нас появились "кандидаты" для ответа. Но это еще не ответ. Мы уже упоминали о необходимых и достаточных условиях. Пришло время рассмотреть это подробнее.

Нестрогое рассуждение. Нам было необходимо, чтобы нашим ответом был ноль. Только он может быть единственным. Отталкиваясь от этого, мы получили те *a*, которые приведут к такому ответу. Но достаточно ли это требование, чтобы решение было единственным? Ведь не факт, что если ноль является решением уравнение, то не найдется никаких других *x*, которые так же будут решениями.

Поэтому нам придется проверить решения для каждого *a*.

**Пусть *a*=3**

Тогда исходное уравнение примет вид $x^2 = 2|x|$. Решаем, пользуясь все теми же свойствами модуля:

x=0;x=2;x=–2.

Отсюда видим, что при *a*=3 будет три решения и одно из них ноль (чего мы и добивались изначально). Значит, такое *a* нас не устроит.

**Пусть *a*=1**

Тогда исходное уравнение будет выглядеть так: $x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|$. Решим графически. Получили единственное решение.

**Пусть *a*=5.** Получим $x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|$, т.е. такое же, как при a=1.

**Ответ: *a*=1, *a*=5**

3. Найти все значения a, при которых уравнение $x^2 - 2asin(cosx) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Инвариантность относительно *x* и *–x*. Находим «подозрительные» *a* из условия *x=0.*

$a^2 - 2asin1 = 0; a(a - 2sin1); a = 0$ и $a = 2sin1$. Проверяем единственность:

$a = 0; x^2 = 0$ - решение единственное;

$a = 2sin1;\ x^2 - 4sin1sin(cosx) + 4sin^21 = 0;\ ;\ x^2 + 4sin^21 = 4sin1sin(cosx)$. Применяем метод ограниченности функций: Е($x^2 + 4sin^21$)=[$4sin^21; \infty$); Е$(4sin1sin(cosx)) =$ $[-4sin^21; 4sin^21]$. Следовательно $\begin{cases} x^2 + 4sin^21 = 4sin^21 \\ 4sin1sin(cosx) = 4sin^21 \end{cases}$ *x*=0 единственное решение.

Ответ: $a_1 = 0;\ a_2 = 2sin1$

4. Найти все значения a, при которых уравнение $\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1} + 2a\right| = a^2 + 1$ имеет нечётное число решений.

Хоть это сложно увидеть, но инвариантность относительно *x* и *–x*! Заменим *x* на *–x:*

$\left|\frac{-x(2^{-x}-1)}{2^{-x}+1} + 2a\right| = a^2 + 1;\ \left|\frac{-x\left(\frac{1}{2^x}-1\right)}{\frac{1}{2^x}+1} + 2a\right| = a^2 + 1;\ \left|\frac{-x(1-2^x)}{1+2^x} + 2a\right| = a^2 + 1;$

$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1} + 2a\right| = a^2 + 1$ Доказали!!! При *x*=0 $|2a| = a^2 + 1$. Легче всего решить графически, но можно и возведением в квадрат: $4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1;\ a^4 - 2a^2 + 1 = 0;$

$(a^2 - 1)^2 = 0;\ a^2 = 1; a = \pm1$. Проверяем:

$a = 1;\ \left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1} + 2\right| = 2;\ \frac{x(2^x-1)}{2^x+1} = 0$ или $\frac{x(2^x-1)}{2^x+1} = -4$. В первом случае одно решение *x*=0. Во втором преобразуем выражение $x(2^x - 1) = -4(2^x + 1);\ 2^x(x + 4) = x - 4;$

$2^x = \frac{x-4}{x+4};\ 2^x = 1 - \frac{8}{x+4}$. Построив графики показательной функции и гиперболы, легко можно убедиться, что пересечений, т.е. корней нет. Т.е. при *a*=1 решение *x*=0 только одно.

a =–1; $\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1} - 2\right| = 2;\ \frac{x(2^x-1)}{2^x+1} = 0$ или $\frac{x(2^x-1)}{2^x+1} = 4$; В первом случае одно решение *x*=0. Во втором преобразуем выражение $x(2^x - 1) = 4(2^x + 1);\ 2^x(x - 4) = x + 4;$

$2^x = \frac{x+4}{x-4};\ 2^x = 1 + \frac{8}{x-4}$. Построив графики показательной функции и гиперболы, легко можно убедиться, что пересечений два. Т.е. при *a*=-1 решение три. Хотя мы и нашли точное количество корней, но если их количество конечное, то при решении *x*=0 их всегда будет нечётное число. Но то, что количество корней конечно, надо доказать!

Ответ: $a = \pm1$

5. Найти все значения a, при которых уравнение $2^{\frac{2x}{x^2+1}} + acos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0$ имеет единственное решение.

В этом примере необычная инвариантность. Подставим вместо $x$ выражение $\frac{1}{x}$.

$2^{\frac{\frac{2}{x}}{\left(\frac{1}{x}^2\right)+1}} + acos\left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}{\frac{1}{x}}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0;\ 2^{\frac{2x}{1+x^2}} + acos\left(\frac{1-x^2}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0$. Но косинус – чётная функция. Получили инвариантность. Значит $x = \frac{1}{x};\ x^2 = 1; x = \pm1$. Подставляем:

1. *x=1;* 2+$a + a^2 - \frac{5}{4} = 0;\ a^2 + a + \frac{3}{4} = 0$. Дискриминант меньше нуля.

2. $x=-1$; $\frac{1}{2}+a+a^2-\frac{5}{4}=0$; $a^2+a-\frac{3}{4}=0$; $a_1=\frac{1}{2}$ и $a_2=-\frac{3}{2}$. Проверяем:
$a_2=-\frac{3}{2}$. Применяем универсальную замену $x=tg\frac{t}{2}$, где $t\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$
$2^{sint}-\frac{3}{2}cos(2ctgt)+\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=0$.
$2^{sint}+1=\frac{3}{2}cos(2ctgt)=0$; $cos(2ctgt)=\frac{1}{3}\left(2+2^{sint}\right)$. Используем ограниченность функций: E($cos(2ctgt)$)=$[-1;1]$, E($\frac{1}{3}\left(2+2^{sint}\right)$)=$\left[1;\frac{4}{3}\right)\cup(\frac{4}{3};2]$, $\begin{cases} cos(2ctgt)=1 \\ \frac{1}{3}\left(2+2^{1+sint}\right)=1 \end{cases}$.
Рассмотрим второе уравнение $2^{1+sint}=1; sint=-1$. На интервале $t\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$ имеется только один корень $-\frac{\pi}{2}$, который удовлетворяет первому уравнению системы.
$a_1=\frac{1}{2}$; после универсальной замены получаем $cos(2ctgt)=2-2^{1+sint}$ и доказываем, что На интервале $t\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$корней бесконечно много (смотри метод замены).
Ответ*:* *a*=-1,5

6. Найти все значения a и b, при которых система $\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4. \end{cases}$ имеет только одно решение (a, b, x, y, z – действительные числа).

Если (x;y;z) решение системы, то и (-x;-y;z) тоже решение. Значит *x=0, y=0*
Получаем $\begin{cases} z=a, \\ z=b, \\ z^2=4. \end{cases}$ «Подозрительные» значения *a*=*b*=-2 и *a*=*b*=2. Проверяем:
Если *a*=*b*=-2, то получаем $\begin{cases} xyz+z=-2, \\ xyz^2+z=-2, \\ x^2+y^2+z^2=4. \end{cases}$ Эта система имеет одно решение (0;0;-2)
Если *a*=*b*-2, то получаем $\begin{cases} xyz+z=2, \\ xyz^2+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=4. \end{cases}$ Эта система имеет пять решений:
(0;0;2), $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right)$ и т.д.
Ответ: *a*=*b*=-2

7. Найти все значения a, при которых система $\begin{cases} |x+a|+|y-a|+|a+1+x|+|a+1-y|=22 \\ |x-4|+|y+4|=2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Если $(x;y)$ является решением системы, то и $(-y;x)$ тоже решение. Система инвариантна относительно $y=-x$. Имеем $\begin{cases} |x+a|+|-x-a|+|a+1+x|+|a+1+x|=22 \\ |x-4|+|-x+4|=2 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} |x+a|+|a+1+x|=11 \\ |x-4|=1 \end{cases}$

1. $x=5$; $|5+a|+|a+6|=11$; решения $a=0$ (проверим графически $|1+x|=11-|x|$, получим корни 5 и $-6$, причём второй корень $-6$ — не удовлетворяет второму уравнению), аналогично проверяем $a=-11$
2. $x=3$; $|a+3|+|a+4|=11$; решения $a=2$ и $a=-9$. Проверяем на единственность решения.

Ответ: $a=\{-11;-9;0;2\}$