IV. **Метод решения однородных уравнений**

Уравнение вида P(x;y)=0 называется однородным, если P(x;y) однородный многочлен.

Многочлен от двух переменных x и y называют однородным, если степень каждого его члена равна одному и тому же числу *к*.

Определение: (Просто ознакомление). Уравнения вида

$$a_0u^n(x) + a_1u^{n-1}(x)v(x) + \cdots + a_ku^{n-k}(x)v^k(x) + \cdots + a_nv^n(x) = 0$$

называют однородным уравнением степени *n* относительно *u(x)* и *v(x)*. Поделив обе части уравнения на $v^n(x)$, можно с помощью замены $p = \frac{u(x)}{v(x)}$ получить уравнение

$$a_0p^n(x) + a_1p^{n-1}(x) + \cdots + a_kp^{n-k}(x) + \cdots + a_n = 0$$

что позволяет упростить исходное уравнение. Случай *v(x)=0* необходимо рассмотреть отдельно, так как на 0 делить нельзя. Причем функции $p(x)$и $v(x)$ могут быть какие угодно: степенные, иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические и т.д. Главное – одинаковые степени!

Например: $(x-1)^3 - (x-1)^2y + (x-1)y^2 - y^3 = 0$. Если *y=0*, то *x=1*. Если $y \neq 0$, то

$$\left(\frac{x-1}{y}\right)^3 - \left(\frac{x-1}{y}\right)^2 + \frac{x-1}{y} - 1 = 0;\ p^3 - p^2 + p - 1 = 0;$$

$$p^2(p-1) + p - 1 = 0;\ (p-1)(p^2+1) = 0; \frac{x-1}{y} = 1; y = x - 1;$$

Ответ: *(1;0) и (x;x-1)*, где x – любое число.

Тригонометрические однородные уравнения известны описаны очень широко, говорить о них не буду. Показательные тоже достаточно известны, приведу два примера:

Решить уравнения

$$1)3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$$

ОДЗ: x∈R. Перепишем уравнение в виде

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$$

Разделим обе расти уравнения почленно на 3^{2x}

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0 \Big| : 3^{2x} \neq 0$$

$$3 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 5 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + 2 \cdot \frac{3^{2x}}{3^{2x}} = 0$$

После упрощения приходим к уравнению

$$3 \cdot (\frac{2}{3})^{2x} - 5 \cdot (\frac{2}{3})^x + 2 = 0$$

Это уравнение сводится к квадратному при помощи замены

$$(\frac{2}{3})^x = t,$$

где t>o. Оба корня квадратного уравнения

$$3t^2 - 5t + 2 - 0$$

$$t_1 = \frac{2}{3}, t_2 = 1$$

удовлетворяют условию t>0. Обратная замена

$$(\frac{2}{3})^x = \frac{2}{3}; (\frac{2}{3})^x = 1$$

$$(\frac{2}{3})^x = (\frac{2}{3})^1; (\frac{2}{3})^x = (\frac{2}{3})^0$$

$$x = 1; x = 0$$

Ответ: 1; 0.

$$2)3^{2x+1} - 8 \cdot 15^x + 5^{2x+1} = 0$$

ОДЗ: x∈R.

Сначала избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней, используя свойства степеней

$$2) 3^{2x+1} - 8 \cdot 15^x + 5^{2x+1} = 0$$

представим степень с основанием 15 в виде произведения степеней с основаниями 3 и 5:

$$3 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 3^x \cdot 5^x + 5 \cdot 5^{2x} = 0$$

Делим обе части уравнения на 5^{2x}

$$3 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 3^x \cdot 5^x + 5 \cdot 5^{2x} = 0\_\_ \Big| : 5^{2x} \neq 0$$

$$3 \cdot (\frac{3}{5})^{2x} - 8 \cdot (\frac{3}{5})^x + 5 = 0$$

Пусть

$$(\frac{3}{5})^x = t, t > 0,$$

тогда

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$t_1 = \frac{5}{3}; t_2 = 1$$

Оба корня положительны. Возвращаемся к исходной переменной:

$$(\frac{3}{5})^x = \frac{5}{3}; (\frac{3}{5})^x = 1$$

$$(\frac{3}{5})^x = (\frac{3}{5})^{-1}; (\frac{3}{5})^x = (\frac{3}{5})^0$$

$$x = -1; x = 0$$

Ответ: -1; 0.

Теперь попробуем логарифмические однородные уравнения.

Однородные логарифмические уравнения первого порядка — $b \cdot \log_a f(x) + c \cdot \log_a g(x) = 0$ - не нуждаются в особом подходе для их решения.

ОДЗ:

$$\begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$\log_a (f(x))^b + \log_a (g(x))^c = 0; \quad \log_a (f(x))^b \cdot (g(x))^c = 0; \quad (f(x))^b \cdot (g(x))^c = 1$$

Если между логарифмами стоит знак «минус», удобнее второе слагаемое перенести в правую часть, чтобы получить уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$:

$$b \cdot \log_a f(x) - c \cdot \log_a g(x) = 0; \quad \log_a (f(x))^b = \log_a (g(x))^c; \quad (f(x))^b = (g(x))^c$$

Пример.

$$2\log_5(x - 7) - \log_5(19 - x) = 0$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 7 > 0; \\ 19 - x > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 7; \\ x < 19; \end{cases} \Rightarrow x \in (7; 19).$$

$$\log_5(x - 7)^2 = \log_5(19 - x)$$

Поскольку в левой и правой части уравнения стоят равные логарифмы с равными основаниями, то выражения, стоящие под знаками логарифмов, тоже равны:

$$(x - 7)^2 = 19 - x; \quad x^2 - 14x + 49 - 19 + x = 0; \quad x^2 - 13x + 30 = 0$$

$$x_1 = 3; x_2 = 10$$

Первый корень не входит в ОДЗ.

Ответ: 10.

При решении таких уравнений, в принципе, определять его вид, как однородного, нет необходимости. Иначе обстоит дело с уравнениями второго порядка.

Однородное логарифмическое уравнение второго порядка — это уравнение вида

$$k_1 \log_a^2 f(x) + k_2 \log_a f(x) \cdot \log_a g(x) + $$
$$+ k_3 \log_a^2 g(x) = 0$$

Обе части уравнения делим на квадрат одного из логарифмов:

$$k_1 \log_a^2 f(x) + k_2 \log_a f(x) \cdot \log_a g(x) + $$
$$+ k_3 \log_a^2 g(x) = 0 \_\_ |: \log_a^2 g(x) \neq 0$$

(Предварительно проверяя, не являются ли значения x, при которых этот логарифм обращается в нуль, корнями данного уравнения).

Получаем:

$$\frac{k_1 \log_a^2 f(x)}{\log_a^2 g(x)} + \frac{k_2 \log_a f(x) \cdot \log_a g(x)}{\log_a^2 g(x)} + $$
$$+ k_3 = 0$$

После сокращения:

$$k_1 \cdot \left(\frac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)}\right)^2 + k_2 \cdot \frac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)} + k_3 = 0$$

Пусть

$$\frac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)} = t,$$

тогда

$$k_1 t^2 + k_2 t + k_3 = 0$$

Далее — решение квадратного уравнения относительно t и обратная замена.

Пример.

$$\lg^2(2x+1) - \lg(2x+1) \cdot \lg(2x-1) - $$
$$-2\lg^2(2x-1) = 0$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+1 > 0; \\ 2x-1 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2}; \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Обе части уравнения делим на lg(2x+1)≠0 (этот логарифм обращается в нуль, когда 2x+1=1, то есть при x=0. Но нуль не входит в ОДЗ, следовательно, деление на lg(2x+1) не ведет к потере корней).

$$\lg^2(2x+1) - \lg(2x+1) \cdot \lg(2x-1) - $$
$$-2\lg^2(2x-1) = 0 \_\_ |: \lg^2(2x+1) \neq 0$$
$$1 - \frac{\lg(2x+1) \cdot \lg(2x-1)}{\lg^2(2x+1)} - \frac{2\lg^2(2x-1)}{\lg^2(2x+1)} = $$
$$= 0$$
$$1 - \frac{\lg(2x-1)}{\lg(2x+1)} - 2 \cdot \left(\frac{\lg(2x-1)}{\lg(2x+1)}\right)^2 = 0$$

Пусть

$$\frac{\lg(2x-1)}{\lg(2x+1)} = t,$$

тогда

$$1 - t - 2t^2 = 0$$
$$2t^2 + t - 1 = 0$$
$$t_1 = -1; t_2 = \frac{1}{2}$$

Обратная замена:

$$1)\frac{\lg(2x-1)}{\lg(2x+1)} = -1;$$

$\lg(2x-1)=-\lg(2x+1)$; $\lg(2x-1)=\lg(2x+1)^{-1}$; $2x-1=(2x+1)^{-1}$

$2x-1=\frac{1}{2x+1}$; $(2x-1)(2x+1)=1$; $4x^2-1-1=0$; $x^2=\frac{1}{2}$

$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}; x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Оба корня не входят в ОДЗ.

$2)\frac{\lg(2x-1)}{\lg(2x+1)}=\frac{1}{2}$;

$\lg(2x-1)=\frac{1}{2}\lg(2x+1)$; $\lg(2x-1)=\lg(2x+1)^{\frac{1}{2}}$; $2x-1=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

$2x-1=\sqrt{2x+1}$; $(2x-1)^2=(\sqrt{2x+1})^2$; $4x^2-4x+1=2x+1$; $4x^2-6x=0$

$2x(2x-3)=0$; $2x=0; 2x-3=0$; $x_1=0; x_2=1,5$

Первый корень не входит в ОДЗ.

Ответ: 1,5.

Самые интересные – это иррациональные однородные уравнения, потому что там однородность увидеть труднее всего. Например $5x-4\sqrt{(x+6)(x-2)}$=2. Это уравнение можно решить привычным способом: ОДЗ: $x\in(-\infty;-6]\cup[2;\infty)$, уединяем корень, затем переходим к равносильной системе $\begin{cases} 5x-2\geq 0, \\ \left(4\sqrt{(x+6)(x-2)}\right)^2=(5x-2)^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x\geq 0{,}4, \\ 16(x^2+4x-12)=25x^2-20x+4 \end{cases}$;

$\begin{cases} x\geq 0{,}4, \\ 9x^2-84x+196=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\geq 0{,}4, \\ x=\frac{14}{3} \end{cases}$ Ответ: $x=\frac{14}{3}$ ответ какой-то подозрительный, а лучший способ проверки – решить другим способом. Каким? Представим исходное уравнение так:

$$x+6-4\sqrt{(x+6)(x-2)}+4x-8=0;\ \left(\sqrt{x+6}\right)^2-4\sqrt{(x+6)(x-2)}+4\left(\sqrt{x-2}\right)^2=0$$

Получили однородное уравнение, делим на *x-2*:

$\frac{x+6}{x-2}-4\sqrt{\frac{x+6}{x-2}}+4$; $t^2-4t+4=0\left(t=\sqrt{\frac{x+6}{x-2}}\right)$;

$(t-2)^2=0$; $t=2$; $\frac{x+6}{x-2}=4; x+6=4x-8; x=\frac{14}{3}$ Вот теперь можно быть уверенным в ответе!

В некоторых заданиях без однородности не обойтись. Решим ещё одно уравнение:

$4x^2+12x\sqrt{x+1}=27(1+x)$ Введем замену $t=\sqrt{x+1}$

Получим уравнение: $4x^2+12xt=27t^2$ Перенесем все слагаемые влево: $4x^2+12xt-27t^2=0$

Теперь мы видим, что имеем дело с однородным уравнением, и, так как $x=-1$ не является корнем уравнения (при этом значении x переменная t обращается в ноль), разделим обе части уравнения на t^2. Получим: $4\frac{x^2}{t^2}+12\frac{xt}{t^2}-27\frac{t^2}{t^2}=0$ $4\left(\frac{x}{t}\right)^2+12\frac{x}{t}-27=0$

Решим квадратное уравнение относительно $\frac{x}{t}$ Получим: $\frac{x}{t}=\frac{3}{2}$ или $\frac{x}{t}=-\frac{9}{2}$

Вернемся к исходной переменной. Теперь нам надо решить два уравнения:

$\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{3}{2}$ (1)

$\frac{x}{\sqrt{x+1}}=-\frac{9}{2}$ (2)

Решим уравнение (1): $\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{3}{2}$ $2x=3\sqrt{x+1}$ Вспомним, как решаются простейшие иррациональные уравнения и перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} 9(x+1)=4x^2 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2-9x-9=0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$ Решим первое уравнение системы. Получим: $x_1=3$, $x_2=-\frac{3}{4}$

Условию $x \geqslant 0$ удовлетворяет только корень $x=3$

Решим уравнение (2):

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}=-\frac{9}{2}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат и перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} 81(x+1)=4x^2 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2-81x-81=0 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$$ Решим первое уравнение системы. Получим: $x_1=\frac{81-9\sqrt{97}}{8}$, $x_2=\frac{81+9\sqrt{97}}{8}$

Условию $x \leqslant 0$ удовлетворяет только корень $x_1=\frac{81-9\sqrt{97}}{8}$

Ответ: $x=3$, $x_1=\frac{81-9\sqrt{97}}{8}$