IV. **Метод интервалов (областей) и метод рационализации**

Метод интервалов необходимо использовать практически всегда, когда необходимо решить неравенство. Причём не только рациональное, но почти любое.

Нужно твёрдо знать, что если дано неравенство, то верное решение и ответ даст именно метод интервалов. Например, если дать простейшее неравенство $x^2 \leq 4$, то у половины «не приученных» школьников первоначальный ответ будет $x \leq 2$? А если подумают, то $x \leq \pm 2$. Как это понимать? Нельзя так решать! А как? Чёткий и ясный алгоритм:

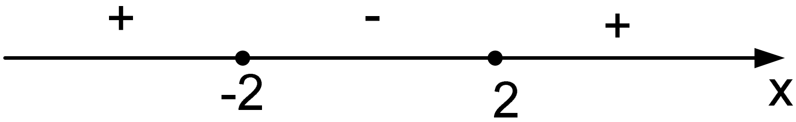
1. Подготовить данное неравенство к методу интервалов, а именно – перенести всё в левую часть (сравнивать с нулём) и разложить на множители (двучлены) или заменить знакопостоянные множители на знак.

Наш пример: $x^2 - 4 \leq 0;\ (x-2)(x+2) \leq 0$

2. Найти нули числителя и знаменателя ($x_1 = -2;\ x_2$=2)
3. Нанести нули на числовую ось с учётом следующего:

— строго по возрастанию;
— включать или не включать в ответ (нули знаменателя никогда не включаем, нули только числителя в зависимости от строгости неравенства - $<, >$ или $\leq, \geq$;
— включаемые нули двучленов чётной степени пометить «флажками»;

4. Расставить знаки – начинать с крайнего правого интервала и по порядку: переходя через точку, или менять знак (степень двучлена нечетная), или сохранять предыдущий (для чётных степеней). Если нули повторяются, то общая степень соответствующих двучленов определяется по свойствам: $a^n a^m = a^{n+m}, \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5. Записать ответ, не забыть про «флажки» (если они есть).



Ответ: $x \in [-2; 2]$

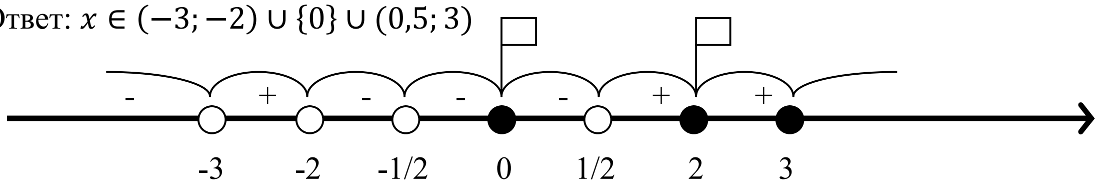
Разберём пример:

$$\frac{(2+x)^5 x^2 (x^2-4x+4)(x^2+x+3)}{(3-x)(2x+1)^4 (x+2)^6 (5x-3+2x^2)} \geq 0$$

1. $\frac{(2+x)^5 x^2 (x-2)^2}{(3-x)(2x+1)^4 (x+2)^4 (2x-1)(x+3)} \geq 0$, $\frac{(x+2) x^2 (x-2)^2}{-(x-3)(2x+1)^4 (2x-1)(x+3)} \geq 0$ *но* $x \neq -2$
2. $x_1 = -3;\ x_2 = -2;\ x_3 = -0{,}5;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0{,}5;\ x_6 = 2;\ x_7 = 3$
3. и 4.

интервалы	(-∞;-3)	(-3;-2)	(- 2;-0,5)!	!(- 0,5;0]!	! [0;0,5)	(0,5; 2]!	! [2;3)	(3; ∞)
знаки	-	-	-	-	-	+	+	-

5. Ответ: $x \in (-3; -2) \cup \{0\} \cup (0{,}5; 3)$

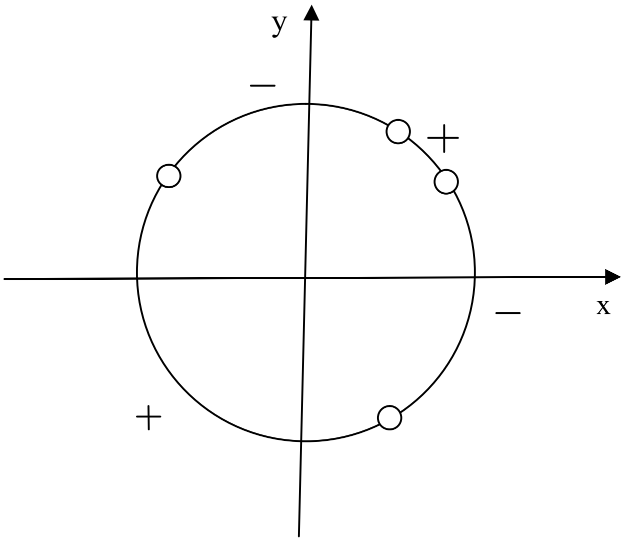


Далее можно придумывать другие задания типа:

Найти где $D(f)$, где $f(x) = \sqrt{\frac{(2+x)^5 x^2 (x^2-4x+4)(x^2+x+3)}{(3-x)(2x+1)^4 (x+2)^6 (5x-3+2x^2)}}$ - ответ тот же.

Найти сумму целых чисел из $D(f)$, где $ff(x) = \cdots$ Ответ: 3

Сколько целых чисел входит в $D(f)$ где $f(x) = \cdots$ Ответ: 3
Сколько положительных чисел входит в $D(f)$ где $f(x) = \cdots$ Ответ: 2
Чему равно произведение целых чисел, входящих в $D(f)$ где $f(x) = \cdots$ Ответ: 0
и т.д.
Однако метод интервалов работает не только для рациональных функций. Например:
Решить неравенство $2sin2x > 2sinx + 2cosx - 1$
$4sinxcosx - 2(sinx + cosx) + 1 > 0$ По сколько присутствуют одновременно произведение и сумма, можно использовать замену $sinx + cosx = t$, тогда $t^2 = sin^2x + 2sinxcosx + cos^2x$;
$t^2 = 1 + 2sinxcosx$; $\quad 2sinxcosx = t^2 - 1$
Получили $2t^2 - 2t + 1 > 0$ и решать квадратное неравенство. Но потом делать обратную замену не так просто…
Используем метод интервалов:
$4sinxcosx - 2(sinx + cosx) + 1 > 0$, раскладываем левую часть на множители группировкой
$(4sinxcosx - 2sinx) - (2cosx - 1) > 0$; $2sinx(2cosx - 1) - (2cosx - 1) > 0$
$(2cosx - 1)(2sinx - 1) > 0$
$cosx = \frac{1}{2}$, $sinx = \frac{1}{2}$, решения $\pm\frac{\pi}{3}$; $\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6},\\ \frac{5\pi}{6}\end{array}\right.$ наносим на единичную окружность (можно и на ось):
получаем четыре интервала, для расстановки знаков берём, например нуль, получаем «-» и чередуем, т.к. двучлены первой степени. «Плюсы» на интервалах от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$ и от $\frac{5\pi}{6}$ до $\frac{4\pi}{3}$
С учётом периодичности получаем ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n)$



I. Решить неравенство (вариант Ларина 132, «осложнённый» мною)):

$$\frac{(x-4)(x^3-18x^2+89x-132)log_{x+1}(x-2)}{(\sqrt{x}-2)(5^x-25)(|x|-1)} \leq 0 \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x > 2; \\ x \neq 4. \end{cases}$$

$$\frac{(x-4)^2(x-11)(x-3)^2}{x(x-4)(x-2)(x-1)(x+1)} \leq 0$$

интервалы	(-∞;-1)	(-1;0)	(0;1)	(1;2)	(2;3]!	![3;4)	(4;11]	[11; ∞)
знаки	+	-	+	-	+	+	-	+

Учитываем ОДЗ: $\begin{cases} x > 2; \\ x \neq 4. \end{cases}$

Ответ: $\{3\} \cup (4; 11]$

II. Решить неравенство (вариант Ларина 134):

$$0{,}5log_{134+tg^2\frac{x}{2}}(21x+16)<log_{134+tg^2\frac{x}{2}}\left(20+\sqrt{x-4}\right)$$

ОДЗ: $\begin{cases} x\geq 4; \\ x\neq \pi+2\pi k, k\in Z. \end{cases}$

$$\left(133+tg^2\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{21x+16}-(20+\sqrt{x-4})\right)<0$$
$$\left(21x+16-\left(20+\sqrt{x-4}\right)^2\right)<0$$
$$\left(21x+16-400-40\sqrt{x-4}-x+4\right)<0$$
$$20x-380-40\sqrt{x-4}<0$$
$$x-19-2\sqrt{x-4}<0$$
$x\in[4;19]$ или при $x\geq 19$: $x^2-38x+361-4x+16<0$

$x\in[4;19]$ или при $x\geq 19$: $(x-13)(x-29)<0$

решение $x\in[4;29)$, с учётом ОДЗ убираем $3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi$

Ответ: $x\in[4;3\pi)\cup(3\pi;5\pi))\cup(5\pi;7\pi))\cup(7\pi;\ 9\pi))\cup(9\pi;29)$

III. Решить неравенство (вариант Иванова А.Е.):

$$\frac{\left(\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+2}{x+3}}-\left(x^2+x+1\right)^2\right)\cdot\log_{x^2}(100+x)}{\left(\sqrt{x^2-x}-1-x^2\right)\cdot\left(|2x-1|-6\right)}\geq 0$$

ОДЗ: $x\in(-\infty;0)\cup(1;\infty), x\neq -2{,}5; \pm 1; 3{,}5;$

$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\frac{x(x+1)\cdot\left(\dfrac{x+2}{x+3}-2\right)\cdot(99+x)}{\left(x^2-1\right)\cdot\left(\left(x^2-x\right)-\left(1+x^2\right)^2\right)\cdot(2x-7)\cdot(2x+5)}\geq 0$$

$$\frac{-x(x+1)(x+4)(x+99)}{-(x-1)(x+1)(x+3)(x^4+x^2+x+1)(2x-7)(2x+5)}\geq 0$$

$$\frac{x(x+1)^0(x+4)(x+99)}{(x-1)(x+3)(2x-7)(2x+5)}\geq 0$$

интервалы	(-∞;-99]	$[-99;-4]$	$[-4;-3)$	(-3;-2,5)	(-2,5;-1) !	!$(-1;0]$	[0;1)	(1; 3,5)	(3,5; ∞)
знаки	-	+	-	+	-	-	+	-	+

Решение: $[99;-4](-3;-2{,}5)\cup[0;1)\cup(3{,}5;\ \infty)$ на ОДЗ!!!

ОДЗ: $x\in(-\infty;0)\cup(1;\infty), x\neq -2{,}5; \pm 1; 3{,}5;$

Не входит только интервал $[0;1)$ (выражение под корнем не может быть отрицательно и основание логарифма не равно нулю).

Поэтому $log_{h(x)}g(x) \vee 0$ надо заменять не на произведение $(h(x)-1)(g(x)-1) \vee 0$, а на дробь $\frac{g(x)-1}{h(x)-1} \vee 0$? Аналогично и в показательных неравенствах исключать равенство основания единице.

Ответ: $[99; -4](-3; -2{,}5) \cup 3{,}5;\ \infty)$

IV. Решить неравенство (вариант Юрьевой О.А.):

$\frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1}$ ОДЗ: $x \neq log_9 2$ и $x \neq 0$

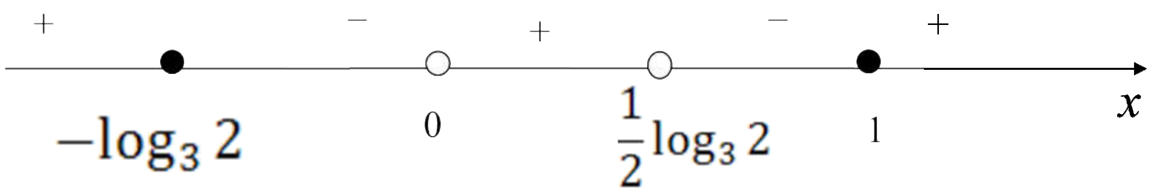
$$\frac{7(3^x-1)-2(9^x-2)}{(3^{2x}-2)(3^x-1)} \geq 0,$$

$$\frac{(3^x-\frac{1}{2})(3^x-3)}{(3^{2x}-2)(3^x-1)} \leq 0$$

$$\frac{\left(3^x - 3^{\log_3 \frac{1}{2}}\right)(3^x - 3)}{(3^{2x} - 3^{\log_3 2})(3^x - 3^0)} \leq 0$$

$$\frac{(x - \log_3 \frac{1}{2})(x - 1)}{\left(x - \frac{1}{2}\log_3 2\right)(x - 0)} \leq 0$$

ОДЗ $x \neq log_9 2$ и $x \neq 0$ выполняется методом интервалов



Ответ: $[-\log_3 2; 0); (\frac{1}{2}\log_3 2; 1]$

$\log_h f \ \vee\ \log_h g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$\log_h f \ \vee\ 1$	$(h-1)(f-h) \vee 0$
$\log_h f \ \vee\ 0$	$(h-1)(f-1) \vee 0$
$\log_h f \cdot \log_p g \ \vee\ 0$	$(h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0$
$\log_h f + \log_h g \ \vee\ 0$	$(h-1)(fg-1) \vee 0$
$h^f \ \vee\ h^g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$h^f \ \vee\ 1$	$(h-1)\cdot f \ \vee 0$
$f^h \ \vee\ g^h$	$(f-g)\cdot h \ \vee\ 0$
$\sqrt{f} \ \vee \sqrt{g}$	$f \vee g$
$\lvert f\rvert \ \vee\ \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g) \vee 0$

Особенно эффективен метод интервалов в сочетании с методом рационализации: Основной является первая формула, отражающая то, что ученики знают: если основание логарифма больше 1, то знак неравенства сохраняется, если меньше 1, то меняется. Сравнение основания с 1 это знак $(h-1)$, а сравнение f и g это знак $(f-g)$. Следовательно, вместо $\log_h f \vee \log_h g$ надо переходить к $(h-1)(f-g) \vee 0$. А это готовое выражение для метода интервалов. Хотя я предпочитаю рассматривать $\frac{f-g}{h-1} \vee 0$, потому что f=g иногда допускается, а h никогда не равно 1. Вторая и третья формулы это частные случаи, когда h=g или g=1. Третья формула это суперпозиция первой формулы для нескольких логарифмов, а четвертая получается при использовании формулы для суммы логарифмов. Понятно, что всё это на ОДЗ. Абсолютно аналогично для показательных функций. Например, выведем формулу 8:

$f^h \vee g^h$, $\left(\frac{f}{g}\right)^h \vee 1$, $\left(\frac{f}{g}-1\right)h \vee 0$, $\frac{(f-g)h}{g} \vee 0$. ОДЗ: $f>o, g>0, f$ и $g \neq 1$. Имеем $(f-g)h \Rightarrow$ ч.т.д.

Можно показать и «кучу» других формул, причём для любых функций: степенных, показательных, логарифмических. Например:

Степенные:

$$\left(f(x)-g(x)\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(f^n(x)-g^n(x)\right)\vee 0, \text{при } n>0, f(x)\geq 0, g(x)\geq 0 \quad (1)$$

$$\left(f(x)-g(x)\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(f^{2k-1}(x)-g^{2k-1}(x)\right)\vee 0, \text{при } k\in N \quad (2)$$

$$\left(f(x)-g(x)\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(f^2(x)-g^2(x)\right)\vee 0, \text{при } f(x)\geq 0, g(x)\geq 0 \quad (3)$$

$$\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)\vee 0, \text{при } f(x)\geq 0, g(x)\geq 0 \quad (4)$$

$$\left(|f(x)|-|g(x)|\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(|f(x)|^2-|g(x)|^2\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(f^2(x)-g^2(x)\right)\vee 0 \quad (5)$$

$$\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(f(x)+g(x)\right)\vee 0, \text{при } f(x)\geq 0, g(x)\geq 0 \quad (7)$$

Показательные:

$$\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)\vee 0, \text{при } a>1 \quad (8)$$

$$\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)\wedge 0, \text{при } 0<a<1 \quad (9)$$

$$\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(\left(f(x)-g(x)\right)\cdot(a-1)\right)\vee 0, \text{при } a>1, 0<a<1 \quad (10)$$

Логарифмические:

$$\left(u(x)^{f(x)}-u(x)^{g(x)}\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(\left(f(x)-g(x)\right)\cdot(u(x)-1)\right)\vee 0, \text{при } u(x)>0 \quad (11)$$

$$\left(\log_a f(x)-\log_a g(x)\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)\vee 0,$$
$$\text{при } a>1, f(x)>0, g(x)>0 \quad (12)$$

$$\left(\log_a f(x)-\log_a g(x)\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)\wedge 0,$$
$$\text{при } 0<a<1, f(x)>0, g(x)>0 \quad (13)$$

$$\left(\log_a f(x)-\log_a g(x)\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(\left(f(x)-g(x)\right)\cdot(a-1)\right)\vee 0,$$
$$\text{при } f(x)>0, g(x)>0 \quad (14)$$

$$\left(\log_{u(x)} f(x)-\log_{u(x)} g(x)\right)\vee 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)-g(x)}{u(x)-1}\vee 0,$$
$$\text{при } f(x)>0, g(x)>0, u(x)>0 \qquad \log_{u(x)} f(x)=\frac{\log_a f(x)}{\log_a u(x)} \quad (15)$$

Можно и много других формул вывести, например сравнение двух степеней с разными переменными показателями: $h(x)^{f(x)} \vee s(x)^{g(x)}$. По основному логарифмическому тождеству всегда можно сменить основание - $h(x)^{f(x)} = \left(a^{log_a h(x)}\right)^{f(x)} = a^{f(x)\cdot log_a h(x)}$

Таким образом сравниваются $a^{f(x)\cdot log_a h(x)} \vee a^{g(x)\cdot log_a s(x)} \Leftrightarrow$
$(a-1)(f(x)\cdot log_a h(x) - g(x)\cdot log_a s(x)) \vee 0$

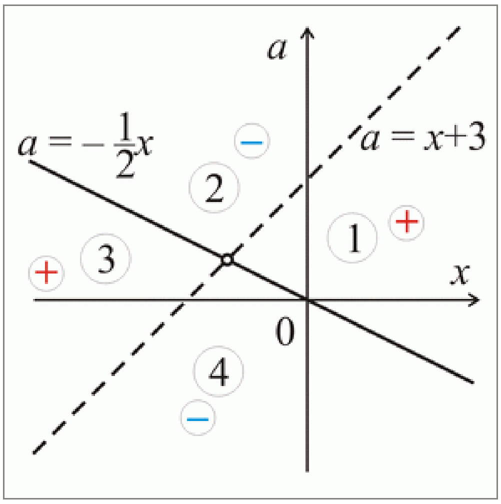
Метод областей (расширение метода интервалов для заданий с параметром).

Решить при всех значениях a неравенство $\frac{x+2a}{x+3-a}\geq 0$.

Решение:

Будем решать задачу методом областей. На координатной плоскости Oxa отметим множество всех точек (x; a), в которых выполняется неравенство $\frac{x+2a}{x+3-a} \geq 0$. Для этого проведем прямые, на которых выражения из числителя и знаменателя обращаются в нуль. Выражение

$x + 2a$ принимает нулевые значения на прямой $a = -\frac{1}{2}x$. Проведем ее в виде сплошной линии на координатной плоскости. В виде пунктирной линии изобразим прямую $a = x + 3$, на которой знаменатель $x + 3 - a$ обращается в нуль.
В итоге, координатная плоскость разбивается на четыре части. Пронумеруем каждую из этих частей.

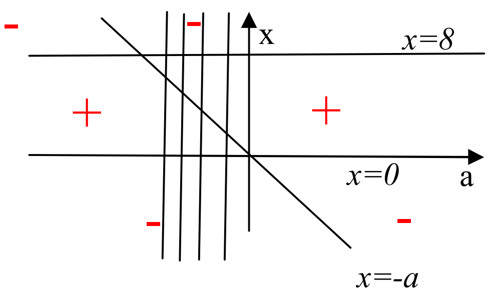


Находим знаки областей, для чего берём любую точку внутри любой области, например (0;1) и подставляем в неравенство $\frac{1+0}{1+3-0} \geq 0$.Поскольку все степени двучленов нечётные, знаки в областях чередуются. Следовательно, число x удовлетворяет неравенству при заданном значении a, если точка (x; a) лежит внутри областей (1), (3) или на прямой, отмеченной сплошной линией, за исключением точки пересечения с пунктирной линией.

Найдем точку пересечения прямых $a = -\frac{1}{2}x$ и $a = x + 3$. Подставляя вместо a во второе уравнение выражение из правой части первого уравнения, получим *x=-2, a=1*.
Если $a = -\frac{x}{2}; x = -2a,$ вторая линия $x = a - 3$

Формируем ответ:
Если $a < 1$, то решения $(-\infty; \mathrm{a} - 3) \cup [-2a; \infty)$.
Если $a = 1$, то решения $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$
Если $a > 1$, то решения $(-\infty; -2a] \cup (a - 3; \infty)$

Найти все значения параметра а, при которых в множестве решений неравенства $\frac{8a^2}{x} - x(x - 2a - 8) > 16a + a^2$ нельзя расположить два отрезка длиной 2 и длиной 5, которые не имеют общих точек.
ОДЗ $x \neq 0$. Упростим
$\frac{8a^2-x^2(x-2a-8)-x(16a+a^2)}{x} > 0$; $\frac{8a^2-x^3+2ax^2+8x^2-16xa-xa^2}{x} > 0$; $\frac{-a^2(x-8)-x^2(x-8)+2ax(x-8)}{x} > 0$;
$\frac{-(x-8)(a^2+2ax+x^2)}{x} > 0$; $\frac{-(x-8)(a+x)^2}{x} > 0$. Подготовили к методу областей. Определяем знак.



Берём точку, например, а=1 и х=1. Подставляем $\frac{28}{1} > 0$
При переходе через прямую *х=-а* знак не меняем (т.к. степень двучлена чётная), при переходах через другие линии – меняем. Множество решений неравенства это «полоска» между *х=0* и *х=8* (не включая) и выколотая линия *х=-а*, которая и не позволяет расположить два отрезка длиной 2 и 5 на «полосе» шириной 8.
Меняем *а* от $(-\infty; \infty)$. До *а=-7* проблем нет,
при $a \in [-7; -6]$ разместить нельзя (отрезок длиной 2 касается отрезка длиной 5, а выше не входит). При $a \in (-6; -5)$ отрезок длиной 2 можно разместить выше линии. При $a \in [-5; -3]$ не куда разместить отрезок длиной 5. При $a \in (-3; -2)$ отрезок длиной 2 можно разместить ниже линии. При $a \in [-2; -1]$ разместить нельзя (отрезок длиной 2 касается отрезка длиной 5, а ниже не входит). При $a > -1$ опять проблем нет.

Ответ: $a \in [-7; -6] \cup [-5; -3] \cup [-2; -1]$