1. Метод решения уравнений «высоких» степеней

В школьном курсе в основном решают линейные или квадратные уравнения, а как быть, если степень больше 2? Наиболее часто употребляются два метода, замена или сравнивают с нулём и раскладывают на множители. О методе замены мы говорили. Примеры это биквадратные уравнения или вида $\sqrt[2n]{f(x)} + a\sqrt[n]{f(x)} = b,$ где а и в – числа. Второй способ рассматривается в данной главе и описывается алгоритмом – перенести всё в левую часть (т.е. сравнивать с нулём) и разложить эту часть на множители. Равенство нулю каждого сомножителя даст все решения. Основная проблема – как разложить на множители?

1. Вынести общий множитель: $x^3 - x^2 - 6x = 0; x(x^2 - x - 6) = 0; x(x-3)(x+2) = 0$
2. Использовать формулу: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$
3. Группировать: $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x^3 - 2x^2) + (3x - 6) = x^2(x - 2) + 3(x - 2) =$ $= (x - 2)(x^2 + 3)$.
4. С помощью замены свести уравнение к квадратному, которое умеем разлагать на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 корни.

Первые два способа не вызывают проблем, с группировкой сложнее, особенно когда количество слагаемых нечетное и одно из них (или несколько) надо «разбивать». А как? Желательно знать один из корней (множители свободного члена, подбором и т.п.).

Но в этой статье в основном будем разбирать примеры на четвёртый способ.

Пример 6. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

Прежде, чем решить заданное уравнение, продемонстрирую алгоритм решения возвратного симметричного уравнения:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (коэффициенты, симметричные относительно центра, равны):

– разделить левую и правую части уравнения на x^2. При этом не происходит потери решения, т. к. $x = 0$ не является корнем исходного уравнения при $a \neq 0$;

– группировкой привести полученное уравнение к виду $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$

– ввести новую переменную $t = x + \frac{1}{x}$, тогда выполнено $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, т.е. $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, в новых переменных рассматриваемое уравнение является квадратным $at^2 + bt + c - 2a = 0$

– решить его относительно t, возвратиться к исходной переменной.

Решение. Исходя из алгоритма решения таких уравнений, разделим левую и правую части уравнения на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Сгруппировав слагаемые, перепишем уравнение в виде

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0 \quad x^2 + 2x\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

или в виде

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Положив $x + \frac{1}{x} = y,$ получим уравнение

$$y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 3. \end{array}\right. \quad \left(x + \frac{1}{x} - 2\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$$ разложили на множители!!!

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=2 \\ x+\frac{1}{x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 1, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

В принципе, данное уравнение можно просто разложить на множители:

$$x^4-x^3-4x^3+4x^2+4x^2-4x-x+1=x^3(x-1)-4x^2(x-1)+4x(x-1)-(x-1)$$
$$=(x-1)(x^3-4x^2+4x-1)=(x-1)\big(x^3-1-4x(x-1)\big)$$
$$=(x-1)\big((x-1)(x^2+x+1)-4x(x-1)\big)=(x-1)^2(x^2-3x+1)$$
$$=(x-1)^2\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

Но как догадаться так раскладывать слагаемые и группировать? А зная метод решения возвратных уравнений (равны первый и последний, второй и предпоследний коэффициенты) можно решить по алгоритму.

Пример 1. $(x-2)(x-1)(x-8)(x-4)=7x^2$

Решение. Заметим, что произведение чисел, стоящих в первой и четвёртой, во второй и третьей скобках, равны, т.е. $-2\cdot(-4)=-1\cdot(-8)$. Перемножим указанные пары скобок, запишем уравнение

$$(x^2-6x+8)(x^2-9x+8)=7x^2$$

Так как $x=0$ не есть решение данного уравнения, то, разделив обе части на x^2, получим равносильное исходному уравнение $\left(x-6+\frac{8}{x}\right)\left(x-9+\frac{8}{x}\right)=7.$

Делая замену переменных $x+\frac{8}{x}=y,$ получаем квадратное уравнение

$$(y-6)(y-9)=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{15+\sqrt{37}}{2} \\ y=\frac{15-\sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$$

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l} x+\frac{8}{x}=\frac{15+\sqrt{37}}{2} \\ x+\frac{8}{x}=\frac{15-\sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$

Решения первого уравнения этой совокупности есть

$$x_1=\frac{\frac{15+\sqrt{37}}{2}+\sqrt{\left(\frac{15+\sqrt{37}}{2}\right)^2-32}}{2},$$

$$x_2 = \frac{\frac{15+\sqrt{37}}{2} - \sqrt{\left(\frac{15+\sqrt{37}}{2}\right)^2 - 32}}{2}.$$

Второе уравнение этой совокупности решений не имеет.

Ответ: $\frac{15+\sqrt{37}+\sqrt{30\sqrt{37}+134}}{4}; \frac{15+\sqrt{37}-\sqrt{30\sqrt{37}+134}}{4}.$

Пример 2. $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$

Решение. Видим, что к данному уравнению можно применить ранее указанный нами приём – «раскрытие скобок парами». Суммы чисел, стоящих в первой и четвёртой, во второй и третьей скобках, равны, т.е. 1+5=2+4. Перемножив эти пары скобок, приходим к уравнению:

$$(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)=10$$

Введём замену: $x^2+6x+5=t$, получим $t(t+3)=10.$ Решив квадратное уравнение $t^2+3t-10=0,$ находим, что $t=2$ или $t=-5.$

Возвращаемся к исходной переменной и решаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+6x+5=-5 \\ x^2+6x+5=2 \end{array}\right.$$

В первом уравнении совокупности $D<0 \Rightarrow$ корней нет.

Перепишем второе уравнение: $x^2+6x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{6}-3 \\ x=-\sqrt{6}-3 \end{array}\right.$

Ответ: $-\sqrt{6}-3; \sqrt{6}-3.$

Пример 3. $2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33$

Решение. Если сделать замену $y=2x^2+3x$ уравнение упрощается, но остаётся иррациональным. Существенного продвижения можно достичь, если ввести новую переменную: $y=\sqrt{2x^2+3x+9}, y \geq 0$

$y^2+y-9=33 \Leftrightarrow y=6$ или $y=-7, -7<0-$ посторонний корень

$$\sqrt{2x^2+3x+9}=6 / \cdot (...)^2 \Rightarrow 2x^2+3x+9=36 \Leftrightarrow 2x^2+3x+3=0 \Leftrightarrow x=3; -\frac{9}{2}.$$

Ответ: $-\frac{9}{2}; 3.$

Покажем ещё один приём, когда замена дает симметричную систему:

Пример 4. $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3.$

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{3-x}=y,\ \sqrt[3]{6+x}=z.$

$$y^3+z^3=(3-x)+(6+x)=9.$$

Таким образом, для y и z имеем симметричную систему:

$$\begin{cases} y+z=3 \\ y^3+z^3=9. \end{cases}$$

Обозначим $u=y+z, v=yz,$ тогда

$$y^3+z^3=(y+z)(y^2-yz+z^2)=(y+z)\left((y+z)^2-3yz\right)=u(u^2-3v)$$

Таким образом,

$$\begin{cases} u=3 \\ u(u^2-3v)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=3 \\ yz=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ z=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{3-x}=1 \\ \sqrt[3]{6+x}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{3-x}=2 \\ \sqrt[3]{6+x}=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Ответ: $-5; 2.$

Пример 5. $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{40}{9}$

Решение. Поскольку в левой части стоит сумма двух квадратов, естественно попытаться дополнить её до квадрата суммы или разности. Во втором случае получим

$$x^2-\frac{2x^2}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1}$$

$$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1}$$

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}-2\frac{x^2}{x+1}$$

Введём замену: $\dfrac{x^2}{x+1}=y,$ получим

$$y^2-\frac{40}{9}+2y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{10}{3}. \end{array}\right.$$

Вернёмся к «старой» переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x+1}=\frac{4}{3} \\ \frac{x^2}{x+1}=-\frac{10}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3x^2-4x-4=0 \\ 3x^2+10x+10=0 \end{array}\right. \\ x\neq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3} \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{2}{3};2.$

Пример 6. $(x-1)^4+(x+3)^4=82$

Решение. Обозначим $\frac{(x-1)+(x+3)}{2}$ через y, т.е. сделаем замену переменных $y=x+1$ или $x=y-1.$ Тогда первоначальное уравнение можно переписать в виде $(y-2)^4+(y+2)^4=82$ или, применяя формулу $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$ в виде

$$2y^4+48y^2+2\cdot 16=82$$

Поскольку корни квадратного уравнения $z^2+24z-25=0$ есть $\left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-25 \end{array}\right.$, то решения биквадратного уравнения есть $\left[\begin{array}{l} y^2=1 \\ y^2=-25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[y=\pm 1.\right.$

Следовательно, решения исходного уравнения таковы $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Ответ: $-2;0.$

Пример 7. $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=1$

Решение. Умножив обе части уравнения на 12 и обозначив $6x+6$ через z, получим уравнение $(z+1)^2(z+2)z=12$. Перепишем это уравнение в виде

$$\left(z^2+2z+1\right)\left(z^2+2z\right)=12 \quad (1)$$

Замена: $z^2+2z=u$. Перепишем уравнение в виде $(u+1)u=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=3 \\ u=-4 \end{array}\right.$. Уравнение (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+2z=3 \\ z^2+2z=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3 \\ z=1 \end{array}\right.$.

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l} 6x+6=-3 \\ 6x+6=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{5}{6} \end{array}\right.$

Ответ: $-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{6}$.

Обычно в возвратных или однородных уравнениях надо делить, а вот пример для обратного действия: Найдите произведения корней уравнения $3x^2=\frac{8}{y^2}-5\frac{x}{y}$. Умножим обе части на y^2.

$3x^2y^2=8-5xy; 3(xy)^2+5(xy)-8=0; 3t^2+5t-8=0;$ где $t=xy;\ t_1=1, t_2=-\dfrac{8}{3}$

Ответ: $\left\{1, -\frac{8}{3}\right\}$