II. Графический метод

Графики элементарных функций выпускники более-менее знают, но вот построить линию, задаваемую неким аналитическим выражением для них сложно. Уравнение окружности им известно, а вот что такое задается, например, формулой $y^2 + xy - 5x = 10y - 25$? Если не рассказать, что надо делать, то задания типа №19(С5) решить очень сложно. Алгоритм простой:

1. Перенести всё в одну сторону
2. Разложить на простые множители
3. Приравнять эти множители к нулю
4. Построить простые линии, их совокупность и будет графическим изображением.

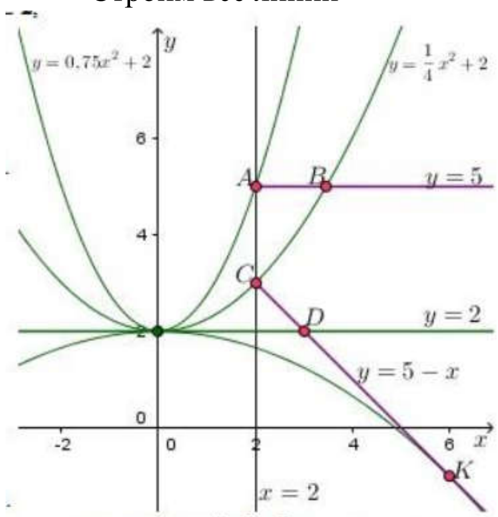
Покажем на примере $y^2 + xy - 5x = 10y - 25$

1. $y^2 + xy - 5x - 10y + 25 = 0$
2. $y^2 - 10y + 25 + xy - 5x = (y-5)^2 + x(y-5) = (y-5)(y-5+x) = 0$
3. $y - 5 = 0$ и $y - 5 + x = 0$, т.е. $y = 5$ и $y = -x + 5$
4. Получили две пересекающиеся прямые.

Пример С5:

Найдите значения параметра, при которых система $\begin{cases} y^2 + xy - 5x = 10y - 25 \\ y = ax^2 + 2 \\ x \geq 2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Строим всё линии



Две прямые, с учетом третьего неравенства, превращаются в два луча АВ и CD. Второе уравнение – семейство парабол с вершиной в (0;2). Строим граничные параболы с положительными a из условий прохождения через точки А(2;5) и С(2;3). Получаем $a \in (\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]$. Учитываем $a = 0$. Находим параболу с отрицательным a, которая касается луча $y = -x + 5$ (через уравнение касательной найдём $a = -\frac{1}{12}$).

Формируем общий ответ.

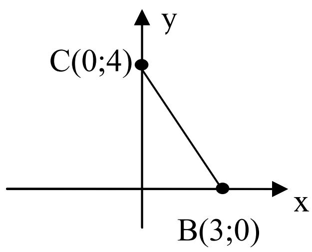
Ответ: $a \in \left\{-\frac{1}{12}, 0\right\} \cup (\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]$

Кстати, все линии для простоты можно было опустить на 2 и рассматривать пересечения лучей $y = 3, y = 3 - x$ и семейства парабол $y = ax^2$.

Приведу ещё один сложный пример:

Найти все значения *a,* при которых система $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 3(3 - 2|x|)} + \sqrt{y^2 + y - a + 8(2 - |y|)} = 5, \\ y - x^2 = a \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

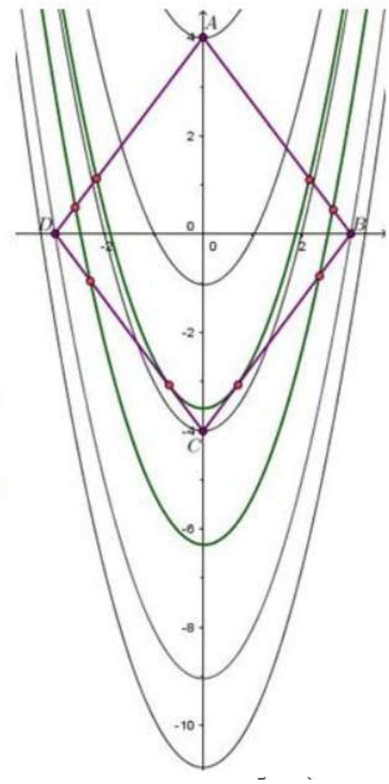
С графиком второго уравнения всё ясно, это семейство парабол $y = x^2 + a$, с вершиной на оси OY, сдвинутой вверх или вниз на a. Первое уравнение упрощаем: $\sqrt{x^2 - 6|x| + 9 + y^2} + \sqrt{y^2 - 8|y| + 16 + y - a} = 5$, под второй корень вместо y подставляем $y = x^2 + a$ и сворачиваем $\sqrt{(|x| - 3)^2 + y^2} + \sqrt{(|y| - 4)^2 + x^2} = 5$. Каждый корень это расстояние от точки А(*x;y*) до точек В($\pm$3;0) и С(0;$\pm$4). Рассмотрим пока I четверть. СВ=5



Вывод: точка А принадлежит отрезку СВ, потому что длина ломанной (сумма расстояний) не может равняться длине отрезка, соединяющего начало и конец ломанной.

Так как и x и y стоят под модулями, то будет четыре отрезка, симметричных осям.

Рассмотрим пересечения:



Ищем граничные значения параметра (т.е. такие, что слева и справа меняются количество пересечений).

Если парабола проходит через точки (± 3:0); $0 = 9 + a$; $a = -9$

Значит, при $a < -9$ пересечений нет; $a = -9$ пересечений 2.

При $a > 9$ пересечений четыре до тех пор, пока парабола не «поднимется» до точки (0;-4); $-4 = 0 + a$; $a = -4$. В этой точке пересечений 5,в точке касания опять 4, а выше 2, затем одно (в точке (0;4)) и ни одного. Имеем удовлетворяющий условию интервал (-9;-4) и $a_к$ при касании. Найдем это $a_к$:

Касательная $y = kx + b$ проходит через точки (-4;0) и (3;0) $\begin{cases} -4 = 0 + b \\ 0 = 3k + b \end{cases}$; $\begin{cases} b = -4 \\ k = \frac{4}{3} \end{cases}$ $y = \frac{4}{3}x - 4$. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания x_0

$2x_0 = \frac{4}{3}$; $x_0 = \frac{2}{3}$; $y_0 = -\frac{28}{9}$; $-\frac{28}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + a$; $a = -\frac{32}{9}$

Ответ: $a \in (-9; -4) \cup \left\{-\frac{32}{9}\right\}$

Можно записать ответ и так: $a \in (-9; -4) \cup \left\{-3\frac{5}{9}\right\}$, но пора отучать выпускников от такой записи. При отсутствии знака между величинами всегда понимается умножение, в смешанном числе между целой и дробной частями понимается алгебраическое сложение.

Графический метод чётко разделятся на два этапа:

1. Непосредственно графический – построить линии, данные в задании (предварительно упростив). В системе это могут быть линии, заданные уравнениями, в уравнении – линии, заданные правой и левой частью и т.д. Пересечение этих линий и даст и количество решений и сами корни. Если нет параметра, то абсциссы точек пересечения дают ответ
2. Наличие параметра задает семейство линий. Изменяя параметр, мы меняем и количество пересечений и сами пересечения. Подбор параметра, дающее выполнение требуемых условий – вторая часть решения.

Другие примеры применения графического метода даны в описании методов ограниченности функций (там необходимо находить множества значений функции, а это легче всего сделать, построив график). А так же графическая культура необходима в методе областей (расширении метода интервалов).