## I. Метод замены

Самый эффективный и поэтому самый часто используемы метод – метод замены. Вместо выражения появляется только одна переменная, что позволяет свести сложное задание к более простому.

Необходимо приучать учащихся к обязательной последовательности действий:

1. Найти ОДЗ
2. Упростить («сделать одинаковым и заменить»!!!)
3. Решить упрощенное
4. Сделать обратную замену
5. Записать в ответ только то, что входит а ОДЗ.

Необходимо только уточнять, что сделать одинаковым? Аргументы и функции. В тригонометрии это выражения под тригонометрическими функциями и сами функции. В показательных заданиях – показатели и основания. В логарифмических – под логарифмические функции и основания логарифмов. Как? С помощью формул (свойств).

Примеров с заменой очень много, нет смысла здесь их приводить, напомню только особые замены. Например, в уравнениях, где есть одновременно $sinxcosx$ и $sinx \pm cosx$ применяется замена $sinx \pm cosx = t$. Тогда $t^2 = (sinx \pm cosx)^2 = sin^2x \pm 2sinxcosx + cos^2x = 1 \pm 2sinxcosx$ и $sinx \pm cosx = \pm\frac{t^2-1}{2}$. Тригонометрическое уравнение сводится к алгебраическому.

Достаточно эффективна универсальная замена:

$$sinx = \frac{2tg\,{}^{x}/_{2}}{1+tg^2\,{}^{x}/_{2}} = \frac{2t}{1+t^2};\,cosx = \frac{1-tg^2\,{}^{x}/_{2}}{1+tg^2\,{}^{x}/_{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$tgx = \frac{2tg\,{}^{x}/_{2}}{1-tg^2\,{}^{x}/_{2}} = \frac{2t}{1-t^2};\,ctgx = \frac{1-tg^2\,{}^{x}/_{2}}{2tg\,{}^{x}/_{2}} = \frac{1-t^2}{2t}$$

Эта замена позволяет практически любое тригонометрическое уравнение свести к алгебраическому, но иногда очень сложному уравнению.

Но эта замена полезна не только в тригонометрии. Например задание:

Сколько корней имеет уравнение $2^{\frac{2x}{x^2+1}} + 0{,}5cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - 1 = 0$. Показатель у двойки и функция под косинусом «подталкивают» применить замену $x = tg\,{}^{t}/_{2}.\ где\ t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$. Получаем: $2^{sint} + 0{,}5cos(2ctgt) - 1 = 0$, следовательно $cos(2ctgt) = 2 - 2^{1+sint}$. Поскольку $f_1 = 2ctgt\ при\ t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$ изменяется $(-\infty; +\infty)$ с «дыркой» в нуле, то $cos(2ctgt)$ с $T = 2\pi$ колеблется от -1 до 1 с «дырками» в $\pi k; k \in Z$. График функции $f_2$, стоящей в правой части, тоже колеблется с $T = 2\pi$ от «-2» до «1». $f_1\left(-{}^{\pi}/_{2}\right) = 1$; $f_2\left(-{}^{\pi}/_{2}\right) = 1$. Пересечение, которое повторится с периодом $T = 2\pi$. Следовательно, корней бесконечно много.

*Пример 1.* Решить иррациональное уравнение $\sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt[6]{x+2} = 3$

Замена: $\sqrt[6]{x+2} = t, t \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x+2} = \left(\sqrt[6]{x+2}\right)^2 = t^2$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -2 \\ t_1 \cdot t_2 = -3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = -3, -3 \leq 0 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

Обратная замена: $\sqrt[6]{x+2} = 1 / \cdot (\ldots)^6 \Leftrightarrow x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$ Ответ: $-1$.

*Пример2.* Рассмотрим уравнение, содержащее знак модуля:

$$\left(3|x+1|+\frac{1}{3}\right)^2=6(x+1)^2+\frac{10}{9}$$

Замена: $|x+1|=a \Rightarrow (|x+1|)^2=a^2$

$$\left(3a+\frac{1}{3}\right)^2=6a^2+\frac{10}{9} \Rightarrow 9a^2+2a+\frac{1}{9}-6a^2-\frac{10}{9}=0 \Rightarrow$$

$$3a^2+2a-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{3} \\ a=-1 \end{array}\right.$$

Обратная замена: $|x+1|=-1, -1<0 -$ корней нет,

$$|x+1|=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=-\frac{1}{3} \\ x+1=\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{4}{3} \\ x=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$$ Ответ: $-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}$.

*Пример 3.* Решить уравнение: $\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$

Замена: $x+\frac{1}{x}=z \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=z^2 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2 \Rightarrow$

$$7z-2(z^2-2)=9 \Rightarrow 2z^2-7z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{5}{2} \\ z=1 \end{array}\right.$$

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \\ x+\frac{1}{x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0 \\ x^2-x+1=0 \end{array}\right.$

$2x^2-5x+2=0$, $x^2-x+1=0$, $D<0 -$ корней нет.

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1}{2}; 2.$

*Пример 4.* Рассмотрим другое простейшее уравнение, сводящееся к квадратному:

$$(x^2+x-1)\cdot(x^2+x+1)=2$$

Попытка перемножить скобки в левой части исходного уравнения приведёт нас к уравнению четвёртой степени, решение которого приведёт к трудоёмким вычислениям.

Обозначим через $t$ выражение $x^2+x$. В переменных $t$ исходное уравнение имеет вид:

$$(t-1)(t+1)=2$$

Раскрыв скобки, получим: $t^2=3 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{3}$

Обратная замена: $x^2+x=\sqrt{3}$ или $x^2+x=-\sqrt{3}$

$x^2+x-\sqrt{3}=0$ $\quad x^2+x+\sqrt{3}=0$

$D=1^2+4\cdot1\cdot\sqrt{3}=1+4\sqrt{3}$ $\quad D=1-4\sqrt{3}\le 0-$ корней нет

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$$

Ответ: $\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$.

Мы продемонстрировали примеры, где замена очевидна. Однако во многих случаях удобная замена далеко не очевидна, и поэтому необходимо выполнить некоторые преобразования. Тем самым мы выявим возможность применения метода замены неизвестного в нестандартных ситуациях.

*Пример 1.* Решить уравнение

$$\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$$

*Решение.* Очевидно, что x=0 – не корень уравнения. Разделив числитель и знаменатель каждой дроби на x $\neq$ 0, запишем

$$\frac{x-10+\frac{15}{x}}{x-6+\frac{15}{x}}=\frac{3}{x-8+\frac{15}{x}}$$ и, сделав замену $x-8+\frac{15}{x}=t$, получим

$$\frac{t-2}{t+2}=\frac{3}{t}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-5t-6=0\\ t+2\neq0\\ t\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=6\\ t=-1\end{cases}$$

Вернёмся к «старой» переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x-8+\dfrac{15}{x}=6 \\ x-8+\dfrac{15}{x}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-14x+15=0 \\ x^2-7x+15=0 \end{array}\right. \Rightarrow x_1,x_2=7\pm\sqrt{34}$$

Ответ: $7-\sqrt{34}, 7+\sqrt{34}$.

*Пример 2.* Решить уравнение

$$x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5.$$

*Решение.* Выделим полный квадрат суммы:

$$(x)^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2+2\cdot x\cdot\frac{2x}{x+2}-2\cdot x\cdot\frac{2x}{x+2}=5.$$

Сгруппируем первый, второй и четвёртый члены:

$$\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}=5$$ , или

$$\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}-5=0.$$

Введём замену $\dfrac{x^2}{x+2}=t$, получим $t^2+4t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-5. \end{array}\right.$

Вернёмся к «старой» переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x+2}=1 \\ \dfrac{x^2}{x+2}=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x^2+5x+10=0 \end{array}\right. \\ x\neq-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Ответ: $-1, 2$.

*Пример 3.* Решить уравнение

$$\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2.$$

*Решение.* Положим,

$$u=\sqrt[3]{8x+4},\quad v=\sqrt[3]{8x-4} \quad (1)$$

Тогда исходное уравнение запишется так: $u-v=2$. Поскольку мы ввели две новые функции, надо найти ещё одно уравнение, связывающее переменные $u$ и $v$. Для этого возведём оба равенства (1) в куб и заметим, что $u^3-v^3=8$. Итак, надо решить систему:

$$\begin{cases} u - v = 2 \\ u^3 - v^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 2 \\ (u - v)(u^2 + uv + v^2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 2 \\ (u - v)^2 + 3uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 2 \\ 3uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = -2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{8x+4} = 2 \\ \sqrt[3]{8x-4} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{8x+4} = 0 \\ \sqrt[3]{8x-4} = -2 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Ответ: $\pm \frac{1}{2}$.

*Пример 4.* Решить уравнение

$$x \cdot \left( \frac{5-x}{x+1} \right) \cdot \left( x + \frac{5-x}{x+1} \right) = 6.$$

*Решение.* Введём замены:

$$x \cdot \frac{5-x}{x+1} = u, \quad x + \frac{5-x}{x+1} = v. \qquad (2)$$

Тогда исходное уравнение примет вид $u \cdot v = 6$.

Попробуем составить ещё одно уравнение, зависящее от переменных $u$ и $v$. Для этого найдём сумму:

$$u + v = x \cdot \frac{5-x}{x+1} + \frac{5-x}{x+1} + x = \frac{5-x}{x+1} \cdot (x+1) + x = 5 - x + x = 5.$$

Итак, надо решить систему

$$\begin{cases} u \cdot v = 6 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x \cdot \frac{5-x}{x+1} = 2 \\ x + \frac{5-x}{x+1} = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \cdot \frac{5-x}{x+1} = 3 \\ x + \frac{5-x}{x+1} = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array} \right.$$

Ответ: $1; 2$.

*Пример 5.* Решить уравнение

$$(x-1)(x-7)(x-4)(x+2)=40.$$

*Решение.* Заметим, что суммы чисел, стоящих во второй и четвёртой, в первой и третьей скобках, равны, т.е. -7+2=-1–4. Перемножив эти пары скобок, приходим к уравнению

$$(x^2-5x-14)(x^2-5x+4)=40.$$

Введём замену: $x^2-5x-14=t$, получим $t(t+18)=40$. Решив квадратное уравнение $t^2+18t-40=0$, находим, что $t_1=-20$ или $t_2=2$.

Возвращаемся к исходной переменной и решаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x-14=-20 \\ x^2-5x-14=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=3 \\ x_{3,4}=\dfrac{5\pm\sqrt{89}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $2; 3; \dfrac{5-\sqrt{89}}{2}; \dfrac{5+\sqrt{89}}{2}$.

*Пример 6.* Решить уравнение

$$(x-1)(x-2)(x-8)(x-4)=4x^2.$$

*Решение.* Заметим, что произведение чисел, стоящих в первой и третьей, во второй и четвёртой скобках, равны, т.е. $-8\cdot(-1)=(-2)\cdot(-4)$. Перемножим указанные пары скобок и запишем уравнение

$$(x^2-9x+8)\cdot(x^2-6x+8)=4x^2.$$

Поскольку $x=0$ – не корень, разделим обе части уравнения на $x^2\neq 0$. Получим:

$$\left(x-9+\frac{8}{x}\right)\left(x-6+\frac{8}{x}\right)=4$$

Введя замену: $x-9+\dfrac{8}{x}=t,$ запишем исходное уравнение в следующем виде:

$t\cdot(t+3)=4$, т.е. $t^2+3t-4=0$.

Отсюда $t_1=1$, $t_2=-4$. Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x-9+\dfrac{8}{x}=1 \\ x-9+\dfrac{8}{x}=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-10x+8=0 \\ x^2-5x+8=0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет корни $x_{1,2}=5\pm\sqrt{17}$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $5\pm\sqrt{17}$.

*Пример 7.* Решить уравнение

$$\left(x^2-5x+1\right)\left(x^2-4\right)=6\cdot(x-1)^2.$$

*Решение.* Вид уравнения совсем не подсказывает, что его можно свести к однородному. Преобразуем первый множитель, выделив из него выражение, равное второму множителю, т.е.

$$x^2-5x+1=x^2-4-5x+5=\left(x^2-4\right)-5(x-1).$$

Подставляя последнее выражение в исходное уравнение, запишем, что

$$\left(\left(x^2-4\right)-5(x-1)\right)\cdot\left(x^2-4\right)=6\cdot(x-1)^2,$$

и далее:

$$\left(x^2-4\right)^2-5\cdot(x-1)\left(x^2-4\right)=6\cdot(x-1)^2.$$

Введя замену: $x^2-4=u$ и $x-1=v$, приведём последнее уравнение к виду $u^2-5vu=6v^2$. Это однородное уравнение второй степени относительно $u$ и $v$. В нём $v^2\neq 0$. В самом деле, если $v=0$, то уравнение приводится к виду $u=0$, или $\left(x^2-4\right)^2=0$. Но система $\begin{cases} x^2-4=0 \\ x-1=0 \end{cases}$ решений не имеет.

Разделив обе части уравнения $u^2-5vu=6v^2$ на $v^2$ $(v\neq 0)$, запишем. Что

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2-5\left(\frac{u}{v}\right)-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{u}{v}=6 \\ \dfrac{u}{v}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-4}{x-1}=6 \\ \dfrac{x^2-4}{x-1}=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+2=0 \\ x^2+x-5=0. \end{array}\right.$$

Отсюда $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7}$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

*Пример 8.* Решить уравнение

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x.$$

*Решение.* Поскольку функция $4x^3 - 3x$ существует при любых значениях $x$, найдём область определения функции $f(x) = \sqrt{1-x^2}$:

$1 - x^2 \ge 0$, значит, $x \in [-1;1]$. Ясно, что можно ввести замену $x = \sin\alpha$ или $x = \cos\alpha$. Пусть $x = \sin\alpha$. Нас интересуют все значения этой функции. Выберем для удобства любой отрезок, на котором функция синус принимает все свои значения, например отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Подставив замену в уравнение, получим:

$$\begin{cases} \sqrt{1-\sin^2\alpha} = 4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2\alpha} = -\sin 3\alpha \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos\alpha| + \sin 3\alpha = 0 \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos\alpha + \sin 3\alpha = 0 \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin 3\alpha = 0 \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = 0 \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \alpha + \dfrac{\pi}{4} = \pi n, n \in Z \\ 2\alpha - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z \end{array}\right. \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{\pi}{4} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{8} \\ \alpha = \dfrac{3\pi}{8}. \end{array}\right.$$

Вернёмся к «старой» переменной:

$$x_1 = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right);\ x_2 = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}};$$

$x_3 = \sin\dfrac{3\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{6\pi}{8}}{2}}.$

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $-\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

*Пример 9.* Решить уравнение

$$\frac{(x^2+1)(x+1)^2+x^2}{x^2(x^2+1)+1} = x+\frac{1}{x}.$$

*Решение.* Выделим наиболее часто повторяющееся выражение $(x^2+1)$ и упростим левую часть исходного уравнения:

$$\frac{(x^2+1)(x^2+1+2x)+x^2}{(x^2+1)^2-x^2} = \frac{x^2+1}{x} \quad (1)$$

Введём замену $y = x^2+1$, тогда уравнение (3) примет вид:

$\dfrac{y(y+2x)+x^2}{y^2-x^2} = \dfrac{y}{x}$, или $\dfrac{y^2+2xy+x^2}{y^2-x^2} = \dfrac{y}{x}$,

При дальнейших упрощениях получим

$\dfrac{(y+x)^2}{(y-x)(y+x)} = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y+x}{y-x} = \dfrac{y}{x} \\ y+x \neq 0. \end{cases}$ Применим основное свойство дроби к левой части уравнения, разделив на $x \neq 0$: $\dfrac{\dfrac{y}{x}+1}{\dfrac{y}{x}-1} = \dfrac{y}{x}.$

Введём вторую замену $\dfrac{y}{x} = t$ и решим уравнение:

$$\frac{t+1}{t-1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-2t-1=0 \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1+\sqrt{2} \\ t_2 = 1-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, придём к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+1}{x} = 1+\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2+1}{x} = 1-\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-(1+\sqrt{2})x+1=0 \\ x^2-(1-\sqrt{2})x+1=0. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет решений, а первое даёт два решения, которые и выносятся в ответ. Ответ: $\frac{1+\sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Далее можно и не читать, потому что здесь представлены типовые задачи, сводящиеся к применению метода замены при решении уравнений.

*Пример 1.* $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$

*Решение.* ОДЗ уравнения есть все действительные $x$. Сделаем замену неизвестной $x = tgt$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда исходное уравнение запишется в виде

$\frac{1}{\cos t} - tgt = \frac{5}{2}\cos t,$ (1)

$\cos t \neq 0$, то уравнение (1) $\Leftrightarrow 2 - 2\sin t = 5\left(1 - \sin t^2\right) \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sin t = 1 \\ \sin t = -\frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Из решения этих уравнений промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ принадлежат только $t = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$. Поэтому

$$x = tg\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{\sin\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)}{\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)} = \frac{-3/5}{\sqrt{1-9/25}} = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: $-\frac{3}{4}$.

*Пример 2.* $\frac{x^2+1}{2x+3} + \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{29}{10}$

*Решение.* Обозначим $\frac{x^2+1}{2x+3}$ через $y$. Данное уравнение перепишем в виде $y + \frac{1}{y} = \frac{29}{10}$. Поскольку $y = 0$ не есть решение этого уравнения, то это уравнение равносильно уравнению $10y^2 - 29y + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{5}{2} \\ y = \frac{2}{5} \end{array}\right.$

Сделаем обратную замену: $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+1}{2x+3}=\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{x^2+1}{2x+3}=\dfrac{2}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-10x-13=0\\ x\neq-\dfrac{3}{2}\end{cases}\\ 5x^2-4x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{51}}{2}\\ x=\dfrac{5-\sqrt{51}}{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\dfrac{1}{5}.\end{array}\right.\end{array}\right.$

Ответ: $\dfrac{5-\sqrt{51}}{2};-\dfrac{1}{5};1;\dfrac{5+\sqrt{51}}{2}.$

*Пример 3.* $\dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{10}{9}$

*Решение.* Можно в этом уравнении освободиться от знаменателя, проделать все необходимые преобразования и убедиться, что получившееся уравнение четвёртой степени является возвратным. Но лучше это сделать быстрее. Поделим числитель и знаменатель дроби, расположенной в левой части, на $x^2$. Получим

$$\frac{x+\dfrac{1}{x}}{\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right)^2}=\frac{10}{9}$$

Положим $x+\dfrac{1}{x}=y$, тогда $\dfrac{y}{(y-1)^2}=\dfrac{10}{9} \Rightarrow 10y^2-29y+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=\dfrac{5}{2}\\ y=\dfrac{2}{5}\end{array}\right.$

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}\\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$2x^2-5x+2=0$ или $5x^2-2x+5=0$

$\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ $D<0-$ корней нет.

Ответ: $\dfrac{1}{2};2.$

*Пример 4.* $3(x^2+2x-1)^2-2(x^2+3x-1)^2+5x^2=0$

*Решение.* Так как $x=0$ не является корнем данного уравнения, то, разделив обе его части на $x^2$, получим уравнение

$$3\left(x+2-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+3-\frac{1}{x}\right)^2+5=0$$

Сделав замену неизвестной $x-\frac{1}{x}=y,$ последнее уравнение перепишем в виде

$$3(y+2)^2-2(y+3)^2+5=0$$
$$\Rightarrow 3\left(y^2+4y+4\right)-2\left(y^2+6y+9\right)+5=0 \Rightarrow 3y^2+12y+12-2y^2-12y-18+5=0 \Rightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{x}=1 \\ x-\frac{1}{x}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

*Пример 5.* $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+x+3\right)=6$

*Решение.* Обозначим $x^2+x+2=t,$ тогда получим $t(t+1)=6 \Rightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3. \end{array}\right.$$

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l} x^2+x+2=2 \\ x^2+x+2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Ответ: $-1; 0.$

*Пример 6.* $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$

*Решение.* Так как $x=0$ не является решением уравнения, то, разделив числитель и знаменатель каждой дроби в левой части на $x$, перепишем его в виде

$$\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1$$

Сделав замену переменных $4x+\frac{7}{x}=y,$ перепишем уравнение в виде

$$\frac{4}{y-8}+\frac{3}{y-10}=1$$

Решения этого уравнения есть $\left[\begin{array}{l} y=16 \\ y=9 \end{array}\right.$

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l} 4x+\frac{7}{x}=16 \\ 4x+\frac{7}{x}=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{7}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{1}{2}; \frac{7}{2}$ .

*Пример 7.* $x^6-16x^3+64=0$

*Решение*. Представляя это уравнение в виде $\left(x^3\right)^2-16x^3+64=0,$ вводим новое неизвестное $x^3=z.$ Уравнение примет вид $z^2-16z+64=0 \Leftrightarrow z_1=z_2=8.$

Обратная замена:

$$x^3=8 \Rightarrow x^3-8=0 \Rightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2+2x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$$

Ответ: $2.$

*Пример 8.* $\left(x^2-x+1\right)^3+2x^4\left(x^2-x+1\right)-3x^6=0$

*Решение.* Если раскрыть скобки и привести подобные, то получим уравнение пятой степени стандартного вида. Но если ввести новые переменные $u=x^2-x+1$ и $v=x^2$, то получим уравнение $u^3+2uv^2-3v^3=0$ , являющееся однородным уравнением степени 3 относительно $u$ и $v$.

Однородные уравнения относительно $u$ и $v$ обладают тем свойством, что если разделить все члены уравнения на наивысшую степень одной из переменных, например $v$, если $v = 0$ не является корнем уравнения, то оно превращается в уравнение с одной переменной $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$.

Решим уравнение $y^3 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1$. Разделим многочлен $y^3 + 2y - 3$ на $y - 1$, перейдём к равносильному уравнению

$$(y-1)(y^2 + y + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - 1 = 0 \\ y^2 + y + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \neq 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $1$

***Пример 9.***

$x + \sqrt[8]{x^5} - 12\sqrt[4]{x} = 0.$

*Область допустимых значений задается неравенством* $x \geq 0.$

*Преобразуем уравнение следующим образом:*

$\sqrt[4]{x} \cdot (\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[8]{x^3} - 12) = 0.$

*Один корень этого уравнения* $x = 0.$

*Для решения второго уравнения положим* $y = \sqrt[8]{x^3}, y \geq 0$

*и решим* $y^2 + y - 12 = 0.$

*Корни этого уравнения* $y = 3, y = -4.$

*Последний корень не принадлежит указанному промежутку, поэтому, решая уравнение* $\sqrt[8]{x^3} = 3$, *получим* $x = 3^{\frac{8}{3}}.$

*Ответ :* $\left\{0; 3^{\frac{8}{3}}\right\}.$