МЕТОДЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учитель математики, директор МАОУ СОШ №4 им. И.С. Черных г. Томска Зятнин В.И.

Томск 2016

Методы школьной математики

Оглавление:

Введение.

Обычно при преподавании математики в школе следуют календарно-тематическому плану, где последовательно изучают одну тему за другой. Ученики знакомятся с различными методами, позволяющими решать задания (уравнения, неравенства, системы и т.д.) той или иной темы. Например, в тригонометрии есть методы:

1. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители
2. Решение тригонометрических уравнений сводящихся к квадратным уравнениям
3. Решение тригонометрических уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение
4. Решение тригонометрических уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму
5. Решение тригонометрических уравнений с применением формул понижения степени
6. Решение тригонометрических уравнений как однородное
7. Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента
8. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки
9. Решение тригонометрических уравнений с помощью замены неизвестного
10. Решение тригонометрических уравнений с помощью оценки левой и правой частей уравнения (метод оценок)

— и т.д.

Аналогично рассматриваются способы решения в других темах – показательные функции, логарифмические и т.п.

Но некоторые методы эффективны не только для определённого вида функций, а работают практически всегда. Об этих методах и пойдёт речь в данной статье.

При проведении итогового повторения, при подготовке к ОГЭ и особенно ЕГЭ (когда уже всё «изучено») полезно и результативно организовать работу так:

— берётся одно уравнение (неравенство, система) и решается несколькими способами (чем больше, тем лучше).
— берётся один метод и решаются уравнения с разными функциями – степенными, тригонометрическими, иррациональными, показательными, логарифмическими;

Но, что бы решать одно уравнение разными методами, эти методы надо повторить, что и делается в главах 1-7 (смотри отдельные статьи). В главе 8 разными методами решаются простые уравнения, а в главе 9 – сложное уравнение с параметром.

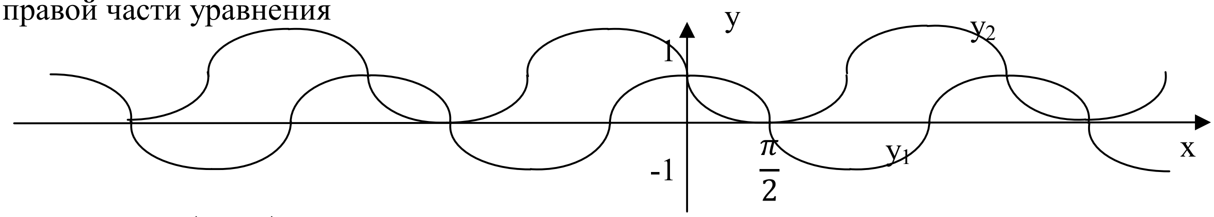
VIII. Решение простого уравнения несколькими способами

Рассмотрим простое (но не простейшее) уравнение $sinx + cosx = 1$

Решим это уравнение несколькими различными методами:

1. Замена $cosx = \pm\sqrt{1 - sin^2x}$ по основному тригонометрическому тождеству $sinx \pm \sqrt{1 - sin^2x} = 1$; $\pm\sqrt{1 - sin^2x} = 1 - sinx$; возводим в квадрат
$1 - sinx = 1 - 2sinx + sin^2x$; упрощаем $sin^2x - sinx = 0$; $sinx(sinx - 1) = 0$
$sinx = 0$ и $sinx = 1$; $x_1 = \pi k, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$. Но если возводили в квадрат, возможно появление посторонних корней, поэтому обязательна проверка. Несложно убедиться, что $x = \pi$ является посторонним корнем $(-1 \neq 1)$
Ответ: , $x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

2. Графический метод: Преобразуем уравнение $cosx = 1 - sinx$ и построим графики левой и правой части уравнения



$y_1 = cosx = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ – синусоида, сдвинутая на $\frac{\pi}{2}$ влево (симметричная оси Y);
$y_2 = 1 - sinx$ – перевёрнутая синусоида, поднятая ввер на единицу.
Точки пересечения 0, $\frac{\pi}{2}$ и повторяются через 2π.
Ответ: , $x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

3. С помощью введения вспомогательного аргумента:
Поделим правую и левую часть на $\sqrt{2}$:
$\frac{1}{\sqrt{2}}sinx + \frac{1}{\sqrt{2}}cosx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ т.к. $\frac{1}{\sqrt{2}} = cosx = sinx$, то преобразуем
$sinxcos\frac{\pi}{4} + cosxsin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получили простейшее уравнение

$$x_1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad x_2 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \qquad x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: , $x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

4. Как однородное:
Сделаем данное уравнение однородным, используя формулы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество

$$2sin\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}$$

Проверяя $\cos\frac{x}{2} = 0$ и решая после приведения методом деления на $cos^2\frac{x}{2}$ получаем

$$2tg\frac{x}{2} - 2tg^2\frac{x}{2} = 0, \qquad tg\frac{x}{2} = 0 \text{ или } tg\frac{x}{2} = 1, \qquad \frac{x_1}{2} = \pi n, \qquad \frac{x_2}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$x_1 = 2\pi n, \qquad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: , $x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

5.	С помощью универсальной тригонометрической подстановки:
Универсальная замена: $sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$
Получили $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1$; $\frac{2tg\frac{x}{2}+1-tg^2\frac{x}{2}-1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 0$; $2tg^2\frac{x}{2} - 2tg\frac{x}{2} = 0$ и далее как во втором методе.

Ответ: , $x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

6.	Метод возведения в квадрат:
Очень полезно подробно разобрать этот метод, в ряде случаев он очень эффективен (например, при избавлении от модуля), но очень «чреват» появлением посторонних корней.
$sin^2x + 2sinxcosx + cos^2x = 1$, $sin2x = 0$, $2x = \pi n, n \in Z; x = \frac{\pi n}{2}$, n$\in Z$.
Но необходимо проверить, нет ли посторонних корней.
Несложно убедиться, что $x = \pi$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ являются посторонними корнями $(-1 \neq 1)$
Ответ: , $x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

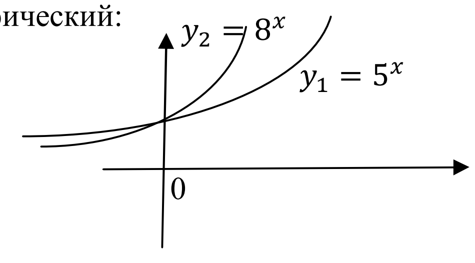
7.	Используя ограниченность функций
$|sinx| \leq 1, |cosx| \leq 1$; поэтому $|sinx| \geq sin^2x$ и $|cosx| \geq cos^2x$, следовательно
$|sinx| + |cosx| \geq sin^2x + cos^2x = 1$ Если в исходном уравнении хотя бы одно слагаемое левой части отрицательное, сумма будет строго меньше 1. Поэтому знак модуля можно отбросить. Причём сумма достигает минимума, когда одна из функций равна нулю, а другая – единице.

Ответ: , $x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

8.	Геометрический метод
Мы уже отмечали, что и sinx и cosx в уравнении sinx+cosx=1 должны быть неотрицательные. Если из величины, не превышающей 1, что-то вычесть, то 1 мы уже никак не получим. Тогда угол $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Получаем треугольник, где $sinx = \frac{a}{c}, cosx = \frac{b}{c}$, a и b катеты, c – гипотенуза. Тогда $sinx + cosx = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} = 1$. Сумма катетов равна гипотенузе, если один из катетов равен нулю. Либо противоположный катет – угол 0^0, либо прилежащий, угол 90^0. С учётом периодичности получаем ответ.
Ответ: , $x_1 = 2\pi n, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Можно придумать и несколько других способов, например:
$sinx + cosx = 1$; по формуле приведения $sinx + sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$; преобразуем по формуле $sin\alpha + sin\beta = 2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ в произведение $2sin\left(\frac{x+x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)cos\left(\frac{x-x-\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 1$;
$2sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$; $\sqrt{2}sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; $sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ далее как в 1 методе. Но это слишком «экзотично», так и с другими методами.

Итак, мы разобрали решения уравнения $sinx + cosx = 1$ несколькими способами. Поскольку уравнение не сложное, его можно разбирать со всеми выпускниками в качестве повторения.
Можно взять и не тригонометрическое уравнение, например: $5^x = 8^x$
1. Графический:



Графики пересекаются в единственной точке x=0.

2. Метод замены – «делай всё одинаковым и заменяй!» - делаем одинаковые основания, применяя основное логарифмическому тождество: $5 = 8^{\log_8 5}$. Получим $8^{\log_8 5 \cdot x} = 8^x$; $\log_8 5 \cdot x = x$; $x(1 - \log_8 5) = 0$; т.к. $\log_8 5 \neq 0$, то $x = 0$.
3. Разложение на множители: $5^x - 8^x = 0$; $8^x\left(\left({}^5\!/_8\right)^x - 1\right) = 0$; $8^x = 0$ или $\left({}^5\!/_8\right)^x - 1 = 0$.

   Показательная функция не равна нулю, значит $\left({}^5\!/_8\right)^x = 1$; $\left({}^5\!/_8\right)^x = \left({}^5\!/_8\right)^0$; $x = 0$

4. Уравнение однородное, $5^x \neq 0$, правую и левую часть делим на 5^x. Можно и на 8^x, но лучше привыкнуть делить на меньшее, что бы новая переменная была больше 1, в уравнениях это не важно, а вот в неравенствах – принципиально.

$$\left({}^8\!/_5\right)^x = 1; \left({}^8\!/_5\right)^x = \left({}^8\!/_5\right)^0;\ x = 0$$

5. Прологарифмируем правую и левую часть: $lg5^x = lg8^x; xlg5 = xlg8; x(lg5 - lg8) = 0$ т.к. $lg5 \neq lg8$; то $x = 0$
6. И т.д.

Аналогично можно решать логарифмическое уравнение, например $\log_2 x = \log_3 x$. Графики понятны, точка пересечения x=1. Одинаковыми основания делать так:

$2 = 3^{\log_3 2}$; $\log_{3^{\log_3 2}} x = \log_3 x$; $\dfrac{1}{\log_3 2}\log_3 x = \log_3 x$;

$\log_3 x\left(\frac{1}{\log_3 2} - 1\right) = 0$; т.к $\log_3 2 \neq 1$, то $\log_3 x = 0$; $x = 1$.

IX. Решение сложного уравнения с параметром несколькими способами

Далее речь пойдет о способах, применимых при решении заданий с параметром и имеет смысл работать с модульной группой, заинтересованных в решении заданий повышенной сложности. На ЕГЭ это предпоследние задания (сейчас №19, ранее С5).
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a+4)^2 = |x + a + 4| + |x - a - 4|$$

имеет единственный корень.

Уместно напомнить, что любое решение задания начинается с нахождения ОДЗ и максимального упрощения. ОДЗ $x \in (-\infty; +\infty)$ и очевидная упрощающая замена $a + 4 = t$, главное потом от найденных значений t не забыть отнять 4.
Имеем уравнение $x^2 + t^2 = |x + \mathrm{t}| + |x - \mathrm{t}|$. Покажем, как решить это уравнение несколькими различными способами.

Аналитический (в «лоб» – раскрываем модули):

$\begin{cases} x \geq -t \\ x \geq t \\ x^2 + t^2 = x + \mathrm{t} + x - \mathrm{t} \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -t \\ x \geq t \\ x^2 - 2x + t^2 = 0 \end{cases}$ единственное решение $x = 1$ при $t = \pm 1$

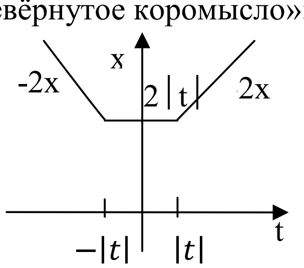
$\begin{cases} x \geq -t \\ x < t \\ x^2 + t^2 = x + \mathrm{t} - x + \mathrm{t} \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -t \\ x < t \\ x^2 = 2t - t^2 \end{cases}$ единственное решение $x = 0$ при $t = 2$

$\begin{cases} x < -t \\ x \geq t \\ x^2 + t^2 = -x - \mathrm{t} + x - \mathrm{t} \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -t \\ x \geq t \\ x^2 = -2t - t^2 \end{cases}$ единственное решение $x = 0$ при $t = -2$

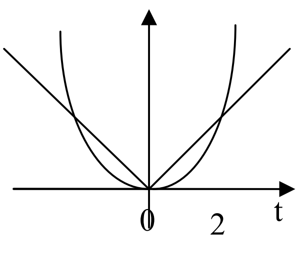
$\begin{cases} x < -t \\ x < t \\ x^2 + t^2 = -x - \mathrm{t} - \mathrm{x} + \mathrm{t} \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -t \\ x \geq t \\ x^2 + 2x + t^2 = 0 \end{cases}$ единственное решение $x = -1$ при $t = \pm 1$

Получаем совокупность:
$x = 1$ при $t = \pm 1$
$x = 0$ при $t = 2$ Данная совокупность имеет единственное решение $x = 0$ при $t = \pm 2$
$x = 0$ при $t = -2$ (при $t = \pm 1$ совокупность имеет два решения $x = \pm 1$,
$x = 1$ при $t = \pm 1$ при $t = 0$ имет три решения $x = \pm 1$ и $x = 0$)
Возвращаемся к параметру $a = t - 4$
Ответ: $a_1 = -2;\ a_2 = -6$

Графическое решение (строим графики левой и правой части на плоскости 0xt и смотрим, при каких значениях параметра они пересекаются один раз):
Левая часть $f_1(t) = x^2 + t^2$ парабола, поднятая на t^2 вверх. Вершина $(0; t^2)$.
Правая часть $f_2(t) = |x + \mathrm{t}| + |x - \mathrm{t}|$ это кусочно-линейная функция, так называемое «перевёрнутое коромысло»:



Парабола и наша кусочно-линейная функция имеют только одну точку, если ордината вершина параболы равна $2|t|$.
$t^2 = 2|t|$ Решаем это уравнение, можно также графически
Пересечение элементарной параболы и вытянутого в 2 раза «уголка» модуля:



Если t=0, то «коромысло» вырождается в уголок и имеется три точки пересечения – три решения, а при $t = \pm 2$ решение одно x=0.

Возвращаемся к параметру $a = t - 4$
Ответ: $a_1 = -2;\ a_2 = -6$

Комплексный метод (аналитически-графический):

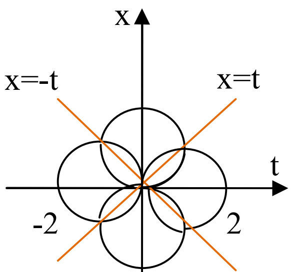
Интересно и познавательно комплексное сочетание аналитического и графического метода, например после раскрытия модулей получаем совокупность систем:

$$\begin{cases} x \geq -t \\ x \geq t \\ x^2 - 2x + t^2 = 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x \geq -t \\ x < t \\ x^2 = 2t - t^2 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x \geq -t \\ x \geq t \\ x^2 = -2t - t^2 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x \geq -t \\ x \geq t \\ x^2 + 2x + t^2 = 0 \end{cases}$$

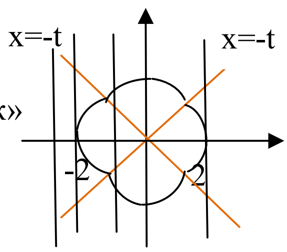
Имеющиеся уравнения «подгоняем» под уравнения окружностей:

$$\begin{cases} x \geq -t \\ x \geq t \\ (x-1)^2 + t^2 = 1 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x \geq -t \\ x < t \\ x^2 + (t-1)^2 = 1 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x \geq -t \\ x \geq t \\ x^2 + (t+1)^2 = 1 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x \geq -t \\ x \geq t \\ (x+1)^2 + t^2 = 1 \end{cases}$$

Строим четыре окружности радиуса 1 с центрами (0;1), (1;0), (-1;0), (0;-1):



С учётом расположения относительно x=-t и x=t получим вот такой «цветочек» Очевидно, что вертикальные прямые t=const имеют одну общую точку с «цветочком» только при $t = \pm 2$



Возвращаемся к параметру $a = t - 4$

Ответ: $a_1 = -2$; $a_2 = -6$

Метод инвариантности:

Решать будем, заметив, что при замене в этом уравнении x на $-x$ ничего не изменится.

Итак, попробуем подставить в это уравнение $-x$ вместо x. Получим:

$$(-x)^2 + t^2 = |-x + t| + |-x - t|$$

$(-x)^2 = x^2$. Но что будет с модулями? На первый взгляд они сильно отличаются от первоначальных. Тут надо воспользоваться свойством, что $|-x| = |x|$ (легко проверяется, если раскрыть знак модуля слева и справа на положительном и отрицательном направлении оси x).

Тогда получим, что внутри модулей в правой части уравнения все знаки можно поменять:

$(-x)^2 + t^2 = |x - t| + |x + t|$.

Выходит, что правая часть осталась точно такое же, как и была изначально, модули просто поменялись местами.

Значит, мы можем сделать важный вывод: если некоторый x удовлетворяет нашему уравнению, то и $-x$ будет также, удовлетворять.

По условию задачи нас просят найти единственный x. Значит, чтобы наши решения не дублировались, необходимо (но не достаточно, об этом позже), чтобы x равнялся нулю.

Таким образом, мы знаем, что x=0 должно быть решением уравнения. Подставим его и найдем t: $t^2=|-t|+|t|$.

По уже использованному свойству модуля $|x|=|-x|$ поменяем знаки внутри первого модуля в левой части. Левую часть тоже преобразуем: $t^2=2|t|$ можно легко проверить, раскрыв модуль по правилам. Получим:

t=0;t=2;t=-2.

Теперь у нас появились "кандидаты" для ответа. Но это еще не ответ. Мы уже упоминали о необходимых и достаточных условиях. Пришло время рассмотреть это подробнее.

Нестрогое рассуждение. Нам было необходимо, чтобы нашим ответом был ноль. Только он может быть единственным. Отталкиваясь от этого, мы получили те t, которые приведут к такому ответу. Но достаточно ли это требование, чтобы решение было единственным? Ведь не факт, что если ноль является решением уравнение, то не найдется никаких других x, которые так же будут решениями.

Поэтому нам придется проверить решения для каждого a.

Пусть *t*=0

Тогда исходное уравнение примет вид $x^2 = 2|x|$. Решаем, пользуясь все теми же свойствами модуля:

x=0;x=2;x=–2.

Отсюда видим, что при *t*=3 будет три решения и одно из них ноль (чего мы и добивались изначально). Значит, такое t нас не устроит.

Пусть t=2

Тогда исходное уравнение будет выглядеть так: $x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|$. Решим графически. Получили единственное решение.

Пусть *t*=-2. Получим $x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|$, т.е. такое же, как при t=2.

Возвращаемся к параметру $a = t - 4$

Ответ: $a_1 = -2;\ a_2 = -6$